Математический анализ

Знаменский С.В.

2012

Лекция 1

Величина. Размерность. Измерение. Погрешность. Число

Величина — это . . . ?

Примеры: длина, ширина, объём, вес, угол, скорость, напряжение.

Размерность — это . . . ?

Намёк: Длина и ширина имеют одинаковую размерность, а угол и вес — разные.

Отношение величин — это . . . ?

Число — это . . . ?

Величина. Размерность. Измерение. Погрешность. Число

Величина — это ...?

Примеры: длина, ширина, объём, вес, угол, скорость, напряжение.

Размерность — это ...?

Намёк: Длина и ширина имеют одинаковую размерность, а угол и вес — разные.

Отношение величин — это ...?

Число — это ...?

Величина. Размерность. Измерение. Погрешность. Число

Величина — это . . . ?

Примеры: длина, ширина, объём, вес, угол, скорость, напряжение.

Размерность — это . . . ?

Намёк: Длина и ширина имеют одинаковую размерность, а угол и вес — разные.

Отношение величин — это . . . ?

Число — это . . . ?

Величина. Размерность. Измерение. Погрешность. Число

Величина — это . . . ?

Примеры: длина, ширина, объём, вес, угол, скорость, напряжение.

Размерность — это . . . ?

Намёк: Длина и ширина имеют одинаковую размерность, а угол и вес — разные.

Отношение величин — это . . . ?

Число — это . . . ?

Величина. Размерность. Измерение. Погрешность. Число

Величина — это . . . ?

Примеры: длина, ширина, объём, вес, угол, скорость, напряжение.

Размерность — это . . . ?

Намёк: Длина и ширина имеют одинаковую размерность, а угол и вес — разные.

Отношение величин — это . . . ?

Число — это . . . ?

Натуральные дроби

Общей мерой двух величин a и b называется такое c, что $a = nc$ и $b = mc$, при целых m и n

Алгоритм Евклида — это способ найти общую меру

Отношение величин точно выражает дробь $\frac{a}{b}$

Натуральные дроби

Общей мерой двух величин a и b называется такое c, что $a = nc$ и $b = mc$, при целых m и n

Алгоритм Евклида — это способ найти общую меру

Отношение величин точно выражает дробь $\frac{a}{b}$

Натуральные дроби

Общей мерой двух величин a и b называется такое c, что $a = nc$ и $b = mc$, при целых m и n

Алгоритм Евклида — это способ найти общую меру

Отношение величин точно выражает дробь $\frac{a}{b}$

Десятичные дроби

Число b делится на $1\underbrace{0\ldots0}_{n}$ равных частей.

Количество частей, укладывающихся в a, делится на $1\underbrace{0\ldots0}_{n}$

Так получается десятичное приближение, например, $\frac{1414}{1000} = 1.414$

Результат можно записать с любой требуемой точностью.

Десятичные дроби

Число b делится на $1\underbrace{0\ldots0}_{n}$ равных частей.

Количество частей, укладывающихся в a, делится на $1\underbrace{0\ldots0}_{n}$

Так получается десятичное приближение, например, $\frac{1414}{1000} = 1.414$

Результат можно записать с любой требуемой точностью.

Десятичные дроби

Число b делится на $1\underbrace{0\ldots0}_{n}$ равных частей.

Количество частей, укладывающихся в a, делится на $1\underbrace{0\ldots0}_{n}$

Так получается десятичное приближение, например, $\frac{1414}{1000} = 1.414$

Результат можно записать с любой требуемой точностью.

Десятичные дроби

Число b делится на $1\underbrace{0\ldots0}_{n}$ равных частей.

Количество частей, укладывающихся в a, делится на $1\underbrace{0\ldots0}_{n}$

Так получается десятичное приближение, например, $\frac{1414}{1000} = 1.414$

Результат можно записать с любой требуемой точностью.

Числовое поле

Полем называется множество

с такими операциями:

Коммутативность: $\forall a, b \quad a+b=b+a$,

$ab=ba$

Ассоциативность: $\forall a, b, c \quad a+(b+c)=(a+b)+c$,

$(ab)c=a(bc)$

Дистрибутивность умножения: $a(b+c)=ab+ac$

Нейтральные элементы: $0+a=a$ и $1\cdot a=a$

Существование обратных элементов:
$\forall a \exists (-a) a+(-a)=0$,

$\forall a \exists a^{-1} a a^{-1}=1$

Числовое поле

Полем называется множество
с такими операциями:

Коммутативность: $\forall a, b \quad a + b = b + a$,

$ab = ba$

Ассоциативность: $\forall a, b, c \quad a + (b + c) = (a + b) + c$,

$(ab)c = a(bc)$

Дистрибутивность умножения: $a(b + c) = ab + ac$

Нейтральные элементы: $0 + a = a$ и $1 \cdot a = a$

Существование обратных элементов:
$\forall a \exists (-a) a + (-a) = 0$,

$\forall a \exists a^{-1} a a^{-1} = 1$

Числовое поле

Полем называется множество

с такими операциями:

Коммутативность: $\forall a, b \quad a + b = b + a$,

$ab = ba$

Ассоциативность: $\forall a, b, c \quad a + (b + c) = (a + b) + c$,

$(ab)c = a(bc)$

Дистрибутивность умножения: $a(b + c) = ab + ac$

Нейтральные элементы: $0 + a = a$ и $1 \cdot a = a$

Существование обратных элементов:
$\forall a \exists (-a) a + (-a) = 0$,

$\forall a \exists a^{-1} a a^{-1} = 1$

Числовое поле

Полем называется множество
с такими операциями:

Коммутативность: $\forall a, b \quad a + b = b + a$,
$ab = ba$

Ассоциативность: $\forall a, b, c \quad a + (b + c) = (a + b) + c$,
$(ab)c = a(bc)$

Дистрибутивность умножения: $a(b + c) = ab + ac$

Нейтральные элементы: $0 + a = a$ и $1 \cdot a = a$

Существование обратных элементов:
$\forall a \exists (-a) a + (-a) = 0$,

$\forall a \exists a^{-1} a a^{-1} = 1$

Числовое поле

Полем называется множество
с такими операциями:

Коммутативность: $\forall a, b \quad a + b = b + a$, $ab = ba$

Ассоциативность: $\forall a, b, c \quad a + (b + c) = (a + b) + c$, $(ab)c = a(bc)$

Дистрибутивность умножения: $a(b + c) = ab + ac$

Нейтральные элементы: $0 + a = a$ и $1 \cdot a = a$

Существование обратных элементов:
$\forall a \exists (-a) a + (-a) = 0$,
$\forall a \exists a^{-1} a a^{-1} = 1$

Образуют ли числовое поле натуральные дроби?

Образуют ли числовое поле десятичные дроби?

Любые ли отрезки имеют общую меру?

Верно ли что веществены числа это бесконечные десятичные дроби?

Верно ли что $0.99999... < 1.0000...$? Почему?

Образуют ли числовое поле натуральные дроби?

Образуют ли числовое поле десятичные дроби?

Любые ли отрезки имеют общую меру?

Верно ли что веществены числа это бесконечные десятичные дроби?

Верно ли что $0.99999... < 1.0000...$? Почему?

Образуют ли числовое поле натуральные дроби?

Образуют ли числовое поле десятичные дроби?

Любые ли отрезки имеют общую меру?

Верно ли что вещественые числа это бесконечные десятичные дроби?

Верно ли что $0.99999\ldots < 1.0000\ldots$? Почему?

Образуют ли числовое поле натуральные дроби?

Образуют ли числовое поле десятичные дроби?

Любые ли отрезки имеют общую меру?

Верно ли что вещественые числа это бесконечные десятичные дроби?

Верно ли что $0.99999... < 1.0000...$? Почему?

Образуют ли числовое поле натуральные дроби?

Образуют ли числовое поле десятичные дроби?

Любые ли отрезки имеют общую меру?

Верно ли что веществение числа это бесконечные десятичные дроби?

Верно ли что $0.99999... < 1.0000...$? Почему?

Предел последовательности

Пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

называется число$A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Какие из следующих последовательностей сходятся к нулю (имеют предел $A = 0$) и почему?

1) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2) $1, \frac{999}{2}, 0.1, \frac{999}{4}, 0.01, \frac{999}{8}, \ldots$

4) $\frac{81}{16}, \frac{54}{24}, 1, \frac{24}{54}, \frac{16}{81} \ldots$

Предел последовательности

Пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

называется число $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Какие из следующих последовательностей сходятся к нулю (имеют предел $A = 0$) и почему?

1) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2) $1, \frac{999}{2}, 0.1, \frac{999}{4}, 0.01, \frac{999}{8}, \ldots$

4) $\frac{81}{16}, \frac{54}{24}, 1, \frac{24}{54}, \frac{16}{81} \ldots$

Предел последовательности

Пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

называется число $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Какие из следующих последовательностей сходятся к нулю (имеют предел $A = 0$) и почему?

1) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2) $1, \frac{999}{2}, 0.1, \frac{999}{4}, 0.01, \frac{999}{8}, \ldots$

4) $\frac{81}{16}, \frac{54}{24}, 1, \frac{24}{54}, \frac{16}{81} \ldots$

Предел последовательности

Пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

называется число $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Какие из следующих последовательностей сходятся к нулю (имеют предел $A = 0$) и почему?

1) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2) $1, \frac{999}{2}, 0.1, \frac{999}{4}, 0.01, \frac{999}{8}, \ldots$

4) $\frac{81}{16}, \frac{54}{24}, 1, \frac{24}{54}, \frac{16}{81} \ldots$

Предел последовательности

Пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

называется число $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Какие из следующих последовательностей сходятся к нулю (имеют предел $A = 0$) и почему?

1) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2) $1, \frac{999}{2}, 0.1, \frac{999}{4}, 0.01, \frac{999}{8}, \ldots$

4) $\frac{81}{16}, \frac{54}{24}, 1, \frac{24}{54}, \frac{16}{81} \ldots$

Предел последовательности

Пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

называется число $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Какие из следующих последовательностей сходятся к нулю (имеют предел $A = 0$) и почему?

1) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2) $1, \frac{999}{2}, 0.1, \frac{999}{4}, 0.01, \frac{999}{8}, \ldots$

4) $\frac{81}{16}, \frac{54}{24}, 1, \frac{24}{54}, \frac{16}{81} \ldots$

Предел последовательности

Пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

называется число $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Какие из следующих последовательностей сходятся к нулю (имеют предел $A = 0$) и почему?

1) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2) $1, \frac{999}{2}, 0.1, \frac{999}{4}, 0.01, \frac{999}{8}, \ldots$

4) $\frac{81}{16}, \frac{54}{24}, 1, \frac{24}{54}, \frac{16}{81} \ldots$

Предел последовательности

Пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

называется число $A = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Какие из следующих последовательностей сходятся к нулю (имеют предел $A = 0$) и почему?

1) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2) $1, \frac{999}{2}, 0.1, \frac{999}{4}, 0.01, \frac{999}{8}, \ldots$

4) $\frac{81}{16}, \frac{54}{24}, 1, \frac{24}{54}, \frac{16}{81} \ldots$

Предел последовательности

Пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

называется число$A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Какие из следующих последовательностей сходятся к нулю (имеют предел $A = 0$) и почему?

1) $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2) $1, \frac{999}{2}, 0.1, \frac{999}{4}, 0.01, \frac{999}{8}, \ldots$

4) $\frac{81}{16}, \frac{54}{24}, 1, \frac{24}{54}, \frac{16}{81} \ldots$

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

имеет предел только в том случае, если

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon}$$

Критерий Коши

Записанное этой формулой условие не только необходимо,

но и достаточно для сходимости, когда речь идёт о вещественных числах

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

имеет предел только в том случае, если

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0\,\exists N\,\forall m, n > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon}$$

Критерий Коши

Записанное этой формулой условие не только необходимо,

но и достаточно для сходимости, когда речь идёт о вещественных числах

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

имеет предел только в том случае, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Критерий Коши

Записанное этой формулой условие не только необходимо,

но и достаточно для сходимости, когда речь идёт о вещественных числах

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
имеет предел только в том случае, если

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon}$$

Критерий Коши

Записанное этой формулой условие не только необходимо,

но и достаточно для сходимости, когда речь идёт о вещественных числах

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

имеет предел только в том случае, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Критерий Коши

Записанное этой формулой условие не только необходимо,

но и достаточно для сходимости, когда речь идёт о вещественных числах

Последовательность монотонна, если либо всегда $a_n \geqslant a_{n+1}$, либо всегда $a_n \leqslant a_{n+1}$.

Последовательность ограничена, если $\exists M \forall n \quad |a_n| \leqslant M$.

Следствие

Теорема о монотонной и ограниченной последовательности

Монотонная и ограниченная последовательность в пространстве $\mathbb{R}$ вещественных чисел сходится.

Последовательность монотонна, если либо всегда $a_n \geqslant a_{n+1}$, либо всегда $a_n \leqslant a_{n+1}$.

Последовательность ограничена, если $\exists M \forall n \quad |a_n| \leqslant M$.

Следствие

Теорема о монотонной и ограниченной последовательности

Монотонная и ограниченная последовательность в пространстве $\mathbb{R}$ вещественных чисел сходится.

Последовательность монотонна, если либо всегда $a_n \geqslant a_{n+1}$, либо всегда $a_n \leqslant a_{n+1}$.

Последовательность ограничена, если $\exists M \forall n \quad |a_n| \leqslant M$.

Следствие

Теорема о монотонной и ограниченной последовательности

Монотонная и ограниченная последовательность в пространстве $\mathbb{R}$ вещественных чисел сходится.

Последовательность монотонна, если либо всегда $a_n \geqslant a_{n+1}$, либо всегда $a_n \leqslant a_{n+1}$.

Последовательность ограничена, если $\exists M \forall n \quad |a_n| \leqslant M$.

Следствие

Теорема о монотонной и ограниченной последовательности

Монотонная и ограниченная последовательность в пространстве $\mathbb{R}$ вещественных чисел сходится.