Н.Н. Непейвода

Инфософия

Введение в системный и логический анализ

Курс лекций

УДК
ББК

Непейвода Н.Н. Введение в системный и логический анализ.
Курс лекций.

Приложения математики являются скорее искусством, чем наукой, хотя и базируются на абстрактнейших достижениях точных наук. Данная публикация является первым опытом пособия по курсу, призванному дать интегральный взгляд на полуформальные и неформальные методы, выявить соблазны и трудности, возникающие при приложении математики, и показать место различных математических дисциплин в данной области.

Рекомендуется для студентов и аспирантов специальностей — математика, информационные системы, прикладная математика, структурная прикладная лингвистика, философия, когнитивная психология.

Насреддин произносил проповедь,и кто-то задал ему каверзный вопрос.
— Не знаю,— ответил Насреддин.
— Зачем же в этом случае ты забрался на минбар?— не унимался слушатель, и Насреддин отрезал:
— Мои знания возвысили меня до минбара. Если бы я захотел взобраться на высоту своего невежества, пришлось бы строить минбар до самого неба.

[11, стр. 306]

Оглавление

Введение

Занимающиеся приложениями математики знают, что данная область, весьма неформальна, если, конечно, пытаться достичь хорошего уровня профессионализма. Конечно, гораздо проще и зачастую выгоднее выполнять работу для заказчика по принципу «Чего изволите?»[1] Но это — дорога, ведущая к духовной катастрофе исполнителей и к большим неприятностям для тех, кто пользуется их “приятными” советами.

Есть и другая опасность. Построенной математической моделью подменяют реальность. При этом забывается, что любая формализация всегда неадекватна, и необходимо хорошо осознавать, в какой момент происходит выход за пределы ее применимости, а также каковы слабости полученных результатов.

Приложения математики к сложным системам — искусство, базирующееся на науке, но не сводящееся к ней одной. Поэтому в данном пособии мы вынуждены часто использовать неформальное изложение и показ на примерах. Более того, по сути дела данное изложение находится на стыке практики и трех дисциплин — математики, информатики, философии:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Математика} \arrow[dr] & & \text{Философия} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \text{СиЛА} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\text{Информатика} & & \text{Практика}
\end{tikzcd} \tag{1}
$$

По формальным критериям и традициям данных отраслей знаний курс мог бы считаться философским либо информатическим, но его роль другая.

Цикл знаний по фундаментальной дисциплине нуждается в прочном основании и четком завершении. Поэтому для выработки общего взгляда, не позволяющего сведениям оставаться на уровне эрудиции, а переводящего их

[1] Или, как это перевел Салтыков-Щедрин, «Применительно к подлости».

в знания, необходимы два центральных курса: основополагающий и интегрирующий. Основополагающим может быть любой курс по данной фундаментальной дисциплине, удовлетворяющий следующим требованиям.

1. Данный курс должен показать основные методы и проблемы, характерные для рассматриваемой науки.

2. Данный курс должен интенсивно привлекать материалы других курсов соответствующего цикла и, в свою очередь, сам снабжать их фундаментальными результатами но ни в коем случае не замыкаться внутри себя.

3. Понятия и результаты, отрабатываемые в данном курсе, должны быть широко применимы за рамками данной науки, что должно показываться в ходе рассматриваемого курса.

В частности, в математике основополагающими могут быть следующие курсы:

— Математический анализ вместе с функциональным анализом, теорией измерений и теорией вероятностей.

— Алгебра вместе с ее приложениями к автоматам, анализу систем, кодированию и т. п.

— Геометрия и топология вместе с ее приложениями к алгоритмам, компьютерной графике, алгебре и анализу.

— Логика вместе с ее приложениями к анализу, алгебре, информатике.

В информатике такими основополагающими курсами могут быть либо искусство программирования, либо информатика как теория программных структур и их представлений.

Такой курс имеется в каждом университете в каждой области знаний. Выбор такого курса диктуется прежде всего традициями данной науки, а во вторую очередь наличием соответствующих научных школ. Но, как правило, такие курсы не удовлетворяют второму и третьему требованиям. Они игнорируют достижения других областей науки, даже если это удлиняет и затемняет изложение. Они считают ниже своего достоинства упоминать о приложениях данной отрасли науки в других отраслях даже той же науки, если эти приложения не вошли в почтенную традицию, как приложения математического анализа к физике либо теории вероятностей к статистике.

Курс, завершающий цикл, должен интегрировать знания, полученные в основополагающем и в других курсах по данной дисциплине, выявить их взаимосвязи и образующуюся систему методов. Он должен показывать, как пользоваться методами разных отраслей изученной науки при решении задач и особенно при их преобразовании, как переносить результаты из одной области в другую, как понимать, что означает для другой области фундаментальный результат некоторого из разделов данной науки. Обычно таких курсов в учебном плане нет. Поэтому в некоторых университетах был введен курс ‘Математические структуры’ как итоговый в математическом цикле.

Но как окончательное завершение здания, как купол над крышей храма, необходим и курс, который посвящен именно месту данной науки в системе знаний человечества и в системе умений рационально мыслящих людей. Такой курс должен находиться не внутри соответствующего цикла, а на его границе или даже за нею, потому что здесь *нужно пользоваться достижениями соответствующей науки, но нельзя быть связанным ее традициями*. Данный курс является первым опытом такой надстройки для специальностей, базирующихся на математике и информатике.

Поэтому в настоящем изложении центр тяжести приходится на средние и большие системы и работу с ними прежде всего в информатике.

Общеметодологические рассмотрения

Глава 1

Из истории математики и информатики

История науки дает очень много для творческого применения науки, если эту историю рассматривать многосторонне, а не как цепь непрерывных успехов. К несчастью, историки науки, как правило, ставят своей целью показать только ее достижения, хотя неудачи, ошибки и недостатки зачастую более поучительны и полезны.[1] Поэтому здесь приводится свой краткий обзор истории математики и частично информатики.

1.1 Предыстория

Люди умели считать (и неплохо) практически с того момента, когда они отделились от предлюдей-неандертальцев. Известно, что Стоунхедж в Англии — грандиозная обсерватория и одновременно вычислительная машина для счета по лунно-солнечному календарю. Правда, хотя Стоунхедж построен в технике каменного века, но уже сравнительно поздно (по разным оценкам, во II–V тысячелетии до н. э.) и его гигантизм является одним из признаков вырождения. А в Сибири найдены роговые и костяные пластинки охотников на мамонтов (10–20 тыс. лет назад), содержащие астрономические счетные

[1] Иногда, наоборот, выяснив нечто нехорошее, историки сбиваются на другой лад: уничижительно-ругательный. В качестве примера см. книгу [34], в которой было переоткрыто многократно делавшееся серьезными астрономами наблюдение, что звездный каталог Птолемея не мог быть составлен в те годы, когда традиционная история предписывает жить Клавдию Птолемею. Р. Ньютон не стал (как другие) высокомерно обвинять Птолемея в неточности вычислений или грубейших ошибках наблюдений. Он подошел к нему как к знающему, авторитетному, высококвалифицированному коллеге, и стал доказывать, что Птолемей просто подделал экспериментальные данные.

последовательности для Луны, Солнца и Венеры и позволяющие предсказывать лунные затмения [26]. Так что (говоря шутливо) информатика зародилась раньше математики, а счетные машины — раньше первых теорем. Повивальной бабкой и математики, и информатики была астрономия (скорее всего, в форме астрологии).

Далее, с появлением письменности сразу начали появляться сборники чисто математических задач, первоначально содержащие в основном задачи на вычисление.

У египтян сохранилось описание методов действий с натуральными числами (как вычисляли вавилоняне и вслед за ними античные астрономы, мы не знаем: уже в те времена описание практических навыков часто исчезало из научных текстов). Они пользовались при умножении и делении надежным, достаточно удобным и практически не зависящим от системы записи чисел методом, который мы проиллюстрируем на следующем примере деления 386386 на 91. Как очевидно, для удвоения числа умножать не обязательно.

		Остаток	Частное
1	91	0	4246
2	182	182	4244
4	364		
8	728	546	4240
16	1456		
32	2912		
64	5824	2002	4224
128	11648		
256	23296		
512	46592		
1024	93184		
2048	186368	13650	4096
4096	372736	386386	
8192	745472		

(1.1)

Вавилонянам принадлежит великое открытие: позиционная система счисления.[2] Но, поскольку основание ее было очень большим (60), а нулем вавилоняне не пользовались, то, как ни странно, техника практических вычислений у них отставала от египетской. Для умножения использовались длинные и сложно устроенные таблицы, а для деления пользовались по сути дела подбором.

[2] Правда, до сих пор неясно, не было ли это открытие примерно в то же время, причем в более совершенной форме, сделано в Центральной Америке, поскольку предшественники майя (ольмеки) уже к началу нашей эры пользовались хорошо разработанной двадцатиричной системой счисления с нулем.

Беда с делением дотянулась до XVII века, мы к этому еще вернемся.

Многие математические традиции закладывались еще в древние времена. В частности, значительная часть математических текстов посвящена решению задач, абсолютно не имеющих отношения к практике, а практические алгоритмы порою не то, что приблизительны, а грубо ошибочны, и это никого не волнует.

Например, египтяне значительную часть обучения математике посвящали тому, чтобы уметь представить дробное решение как алгебраическую сумму различных дробей с числителем 1 (простых дробей). У них появились формулировки задач типа

Разделить 10 кувшинов пива между 3⅓ людьми. (1.2)

В их источниках не найдено упоминания теоремы Пифагора, зато имеется точная формула для объема усеченной правильной четырехугольной пирамиды. В это же время для практически важного случая площади четырехугольного разностороннего поля они дают формулу:

$$S_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}. \tag{1.3}$$

Так что содержательная абсурдность математических задач, неправильность стандартных приемов простых вычислений для общераспространенных случаев при абсолютной правильности формул для сложных, редко встречающихся, зато интересных для математика объектов, и любовь к преодолению искусственных трудностей, созданных традиционным представлением понятий, были заложены в основы математической культуры уже в древности.

Вавилонская математика носила несколько другой оттенок по сравнению с египетской. Позиционная система счисления привила вавилонянам вкус к работе с очень большими числами и прозвольными позиционными дробями.

Упражнения к §1.1

1.1.1. Чему соответствует умножение и деление по-египетски в современных терминах?

1.1.2. Проанализируйте формулу (1.3). Для каких четырехугольников она правильна и какой величины может достигать ошибка в различных случаях?

1.1.3. Приведем цитату из фундаментального труда по истории математики [56, т.1, стр. 21–22].

> Конечно, изложение математики,письменное или устное, предполагает некоторую систематизацию материала... Классификация задач производилась не по методам (например, задачи на пропорции, линейные уравнения и т. д.), а по темам. Задачи на припёк можно объединить в один класс, задачи о емкости зернохранилищ и сосудов — в другой, и т. д. При этом фактически определялась математическая суть данной группы, а значит, единый метод решения, но он не был сформулирован общим образом. Каждая задача решается заново, без каких-либо пояснений, в числах... Иногда дается проверка найденного решения.

Встречали ли Вы в современной науке и технике подобный способ изложения? А в математических книгах?

1.2 Начало математики: эллины

Началом математики как науки явилось положение Пифагора о том, что предложения нельзя утверждать как интуитивно очевидные, а нужно *доказывать*. Но последствия данного положения для всей европейской цивилизации выявились после результата (Филолай, Теэтет либо еще кто-то, V век до р. Х. по традиционной хронологии) о несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны. Было впервые показано, что доказательство заставляет нас принять не только то, что нам хотелось бы (например, теорему Пифагора), но и то, что полностью противоречит ранее накопленным предубеждениям.[3]

Несоизмеримость считают причиной того, что греческая математика стала прежде всего геометрической. Но есть и другая, гораздо более глубокая, причина того, что эллины избегали чисел, которая была выявлена лишь во второй половине XX века. В традиционной трактовке истории науки остановку греков перед понятием числа считают признаком ограниченности либо результатом того, что открытие несоизмеримости выявило необходимость развития теории произвольных действительных чисел, а греки не могли еще

[3] Многие считают, что началом математики была теорема Пифагора, но это, пожалуй, неточно по следующим причинам. Во-первых, теорема Пифагора имеет естественную и приятную формулировку, которая была известна вавилонянам задолго до Пифагора и установлена полуэмпирически. Во-вторых, неизвестно, какое доказательство ей дал сам Пифагор, но зато известно, насколько легко впасть в самообман при доказательстве такого приятного результата и не заметить дыр. Эмпирически же проверить несоизмеримость диагонали со стороной невозможно, теорема о несоизмеримости уже чисто теоретический результат. Более того, для греков формулировка этой теоремы была и крайне неестественна, и неприятна, так что доказывать ее необходимо было строго и без пробелов, иначе ее бы не приняли.

развить ее, удовлетворяя своим канонам строгости (более мягкая и, благодаря не столь высокомерной трактовке, даже содержащая зерна истины, точка зрения).[4] При такой трактовке греки выглядят жертвами своих собственных высоких требований к строгости.

Читая «Элементы» Евклида, обнаруживаешь в них теорию отношений и пропорций, которая эквивалентна теории действительных чисел по Дедекинду, развитой лишь во второй половине XIX века.[5] Так что на самом деле строгое обоснование у греков было, и предыдущее объяснение оказывается поверхностным. Но, читая те же «Элементы», обращаешь внимание и на то, что греки всячески сторонятся даже натуральных чисел. Значит, чем-то их не устраивало само понятие числа в качестве математического объекта.

Из теоремы Гёделя о неполноте следует, что математическая теория, содержащая понятие натурального числа и пользующаяся при этом общепринятой классической логикой, с неизбежностью порождает неэффективные построения, чистые теоремы существования, когда существование объекта доказано, но как построить его — неизвестно. Рассмотрим один из примеров.

Парадокс института математики.

Пусть некий Институт Математики взял заказ на вычисление оптимального значения некоего параметра, который может изменяться от -1 до 1. После годичных глубоких исследований выдана теорема о том, что искомое оптимальное значение есть 0, если не существует максимального простого числа-близнеца, и $\sin p$, если таким числом является p. Поскольку число π иррациональное, $\sin p$ может оказаться где угодно на отрезке $(-1, 1)$. Спрашивается, получил ли заказчик хоть какую-то информацию в результате данного, с точки зрения классической логики, однозначного и полностью определенного ответа?

Данный парадокс совершенно не зависит от конкретного выбора неразрешенной проблемы и от действительных чисел, он приобретает чисто логическую форму, если явно воспользоваться теоремой Гёделя о неполноте.

Пусть G — неразрешимая формула. Из закона $A \vee \neg A$ вытекает доказуемость

$$\exists i\, ((i = 0 \,\&\, \mathsf{G}) \vee (i = 1 \,\&\, \neg \mathsf{G}))\,. \tag{1.4}$$

---

[4] Таким образом, с точки зрения традиционной истории науки, перед строгим обоснованием понятия действительного числа нужно было эмпирически накопить опыт работы с иррациональными числами, не обращая пока что внимания на строгость.

[5] Дедекинда даже спрашивали некоторые ехидные коллеги, что он сделал такого, чего не было у древних?

> Для тех, кто лучше владеет языком информатики, чем языком математики, построение (1.4) можно записать как
>
> $$\text{if } G \text{ then } i := 0 \text{ else } i := 1. \qquad (1.5)$$
>
> Но нельзя построить никакого конкретного значения i_0, обосновывающего (1.4).

А в элементарной геометрии использование классической логики не разрушает конструктивности доказательств, пока явно не используются натуральные числа[6]

Заметим, что даже понятие действительного числа в некотором смысле менее коварно. Элементарная теория действительных чисел полна и разрешима, и в ней парадокса Института математики не возникает.

Неоднократно упоминавшийся выше Евклид (Александрия, III век до р. Х. по традиционной хронологии) дал каноническое изложение геометрии, на многие века ставшее эталоном математической строгости. Аксиоматическая система Евклида состояла из трех компонентов: определения, аксиомы и постулаты. Определения практически вводили исходные понятия и описывали некоторые их содержательные свойства. Например, такой статус носило определение

> Точка — это то, что не имеет частей.

Но среди определений попадались и такие, которые соответствуют нынешнему математическому понятию определения, например:

> Окружность — замкнутая линия, все точки которой расположены на одинаковом расстоянии от одной точки, называемой ее *центром*.

Евклид явно перечислил аксиомы и постулаты, на которых базируется геометрия. Все аксиомы и почти все постулаты были сформулированы так, что они казались интуитивно очевидными, например, аксиома

> Равные одному и тому же равны между собой;

или постулат

[6] Это основание было понято лишь во второй половине XX века, поскольку оно базируется на результате Бернайса о полноте элементарной геометрии и на его сопоставлении с интуиционистскими теориями. Видимо, впервые данный факт был явно отмечен в [30]. Древние греки ограничивали себя из соображений эстетики и гармонии, что оказалось отнюдь не хуже, чем сложнейшие построения современной логики.

Из данной точки данным радиусом можно описать окружность.

Система Евклида подверглась многовековому тщательнейшему анализу, и, конечно же, были найдены выводы, зависящие от упущенных им положений, были введены новые аксиомы, но это не изменило основной части системы.

Первая из упущенных Евклидом аксиом, правда, ненужная для тех задач, которые решались в его труде, была найдена Евдоксом.

Если даны две сравнимых величины, то меньшая из них, сложенная достаточное число раз сама с собой, превзойдет большую. (1.6)

Или в терминах чисел:

$$\forall x, y (x > 0 \,\&\, y > 0 \Rightarrow \exists n\, nx > y). \tag{1.7}$$

Удивительно было то, что все величественное здание геометрии оказалось возможным построить, исходя из весьма ограниченного числа определений, аксиом и постулатов. Поэтому от Евклида берет начало аксиоматический метод.

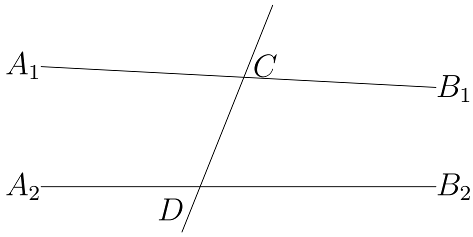
Содержательные аксиоматические теории до сих пор стараются следовать методике изложения материала, созданной Евклидом. Несмотря на то, что в математизированных отраслях науки такие нестрогие теории уже не употребляют, в неформализованных[7] они играют и будут играть важную роль, смотри, например, постулаты общей систематики Любищева [27].

Каждое достижение является вместе с тем и потерей. Исключительно ясная формулировка Евклида изменила значение самого термина 'аксиома', которое стало пониматься как интуитивно ясное положение, не требующее доказательства. Таким образом, аксиомы стали считаться абсолютно истинными. Правда, сам Евклид различал аксиомы и постулаты. Постулаты Евклида говорили о возможности построения объекта, а один из них (знаменитый пятый постулат) будет сформулирован сейчас в чуть-чуть модифицированной форме.[8]

Если суммы углов $\angle A_1CD + \angle CDA_2$ и $\angle B_1CD + \angle CDB_2$ не равны, то прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются с той стороны от CD, где сумма этих углов меньше. (1.8)

[7]Которые обычно вдобавок являются и неформализуемыми.

[8]Модификация связана лишь с тем, что геометрическая терминология Евклида перестала быть общеизвестной.



Анализируя труды Аристотеля, венгерский ученый И. Тот [69] пришел к выводу, что неевклидова геометрия активно обсуждалась в качестве возможной геометрической теории еще в античности. При этом в центре внимания была не параллельность прямых, а сумма внутренних углов треугольника. Рассматривались варианты с суммой, меньшей, большей или равной двум прямым. Евклид выбрал столь сложную формулировку своего постулата затем, чтобы четко указать, каким из вариантов геометрии он пользуется.

В дальнейшем у Птолемея [39] мы находим развитую сферическую геометрию как геометрию небесной сферы. В этой геометрии сумма углов треугольника больше двух прямых, а параллельных прямых нет.[9]

После Евклида изложенная им система геометрии была настолько признана, что споры об исходных принципах геометрии забылись, и аксиомы геометрии стали восприниматься как бесспорно истинные положения. При таком понимании пятый постулат явно выделялся своей интуитивной неясностью, и естественно возникла задача его доказательства. Но максимум, что удалось сделать к исходу античности — показать, что данный постулат эквивалентен гораздо более ясному предположению:

Через любую точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну (1.9)

.

Заметим, что даже в этой формулировке есть шероховатость. Прямая, параллельная данной, легко находится, исходя из остальных аксиом евклидовой геометрии. Так что нетривиальной остается лишь единственность параллельной прямой.

Архимед (Сиракузы, III век до р. Х.) довел до совершенства геометрические методы эллинов. Он распространил аксиоматический метод на одну из областей механики — статику, и сразу же выяснились первые ограничения данного метода. Из аксиом статики нельзя вывести даже силы, действующие на стул с четырьмя ножками, стоящий на полу.

[9] Общее определение прямой (геодезической) линии для произвольной поверхности — линия, расстояние между каждыми двумя точками которой по ней самой меньше расстояния по любой другой линии. Прямые на сфере — окружности большого круга, с центром в центре сферы. Любые две прямые на сфере пересекаются в двух диаметрально противоположных точках, так что параллельных прямых нет.

Стоит отметить несколько особенностей работ Архимеда. Первая из них роднит его с большинством других эллинских математиков.

Аксиом геометрии оказывается недостаточно для задач, включающих неэлементарные объекты. Поэтому буквально в каждом серьезном эллинском исследовании вводились новые аксиомы. Так что всю эллинскую эпоху аксиомы не до конца опускались до положения очевидных тривиальных истин. Остатки прежнего смысла — посылки, которые выдвигаются в качестве основы исследования и в этом качестве подлежат критике — оставались.

Например, у Архимеда в книге «О шаре и цилиндре» принимаются следующие аксиомы длин.

1. Из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая будет наименьшей.

2. Две другие линии, расположенные на плоскости и имеющие одни и те же концы, будут всегда неравными, если обе они выпуклы в одну сторону, и одна из них или целиком объемлется другой линией и соединяющей их концы прямой, или же часть ее объемлется другой, часть же является общей обеим линиям; при этом меньшей будет объемлемая линия.

3. Далее, большая из двух неравных линий, поверхностей или тел превосходит меньшую на такую величину, которая, будучи складываема сама с собой, может превзойти любую заданную величину из тех, которые могут друг с другом находиться в определенном отношении.[10]

Для площадей пришлось ввести подобные же аксиомы.[11]

Вторая — прикладной характер работ Архимеда, которого можно считать отцом прикладной математики. Его класс был в том, что прикладные задачи он решал не менее ответственно и точно, чем теоретические, и, соответственно. был вынужден создавать новые мощные методы.

Третья — то, что Архимед находил свои результаты одним методом, а обосновывал совершенно другим. Содержательно он пользовался методами бесконечно малых, т. е. основами дифференциального и интегрального

[10] [2, стр. 96–97]

[11] Впрочем, последняя из аксиом сформулирована таким образом, что ясно полное понимание Архимедом изоморфности математических структур величин длин, площадей и объемов, которые он вынужден был по античной традиции строго различать. Впрочем, и сейчас программист вынужден различать изоморфные структуры, по-разному представленные в машине. А физик — вообще практически как древний грек. Величина у него имеет размерность, и физик ни за что не станет складывать, скажем, скорость и ускорение. Правда, перемножать и делить он может любые величины, но при этом размерность изменяется.

исчисления, а формально доказывал полученный результат методом исчерпывания. При этом методе фигура приближалась изнутри и снаружи последовательностями составных фигур, меру которых можно было вычислить известными методами (например, окружность — вписанными и описанными правильными многоугольниками). А само доказательство проводилось от противного. Например, предполагалось, что объем пирамиды не равен трети произведения площади основания на высоту. Но, если он не равен, то больше либо меньше. А тогда одна из приближающих фигур опровергает данное предположение (например, в случае, когда объем меньше, она вложена в пирамиду, но имеет больший объем).

Привычка излагать найденные результаты строго, но так, чтобы не было никакого представления о том, как же они получены — родимое пятно т. н. научного стиля и по сей день.

Стоит рассказать еще об одном «чудачестве» Архимеда, менее известном, чем «Эврика», но важном для истории развития научного метода. Архимед, как было принято еще долгое время, до появления системы научных журналов, сообщал свои результаты коллегам в письмах. Поскольку в Александрии была целая школа математиков, чаще всего он писал туда, и порою, дабы не лишать коллег удовольствия самим поломать голову над задачей, не сообщал доказательств. Но скоро он заметил, что уж слишком лихо они доказывают присланные утверждения. И тогда он стал перемежать правильные утверждения неправильными, дабы отучить их от излишней легкости в доказательствах. Таким образом, Архимед первым заметил, в какой тупик ведет науку постановка задач в форме «Доказать, что». И он же нащупал выход из данного тупика, который стоило бы шире использовать в практике преподавания.

Диофант (III век по традиционной хронологии) ввел в математику числа, которые ранее считались предметом ремесла, называвшегося *логистикой*. Он первым в Европе сформулировал правила алгебраических операций с положительными и отрицательными выражениями в форме:

Недостаток, умноженный на недостаток, дает избыток. (1.10)

Практически Диофант уже мог записывать формулы с не слишком большими положительными и отрицательными степенями и с одной свободной переменной. Вместо второй он брал какое-то конкретное число, комментируя это так, что можно было взять и другое.

Птолемей (II век по традиционной хронологии; поскольку астрономические наблюдения поддаются независимой объективной датировке, уже точно установлено, что традиционная дата неверна и имеет погрешность, может быть, до 200 лет) показал, как разложить эмпирически наблюдаемое периодическое движение в композицию движений по окружности, чем заложил основы метода, известного в современной науке как ряды Фурье.

Более того, Птолемея можно считать отцом метода компьютерного моделирования. Его система мира принципиально не имела назначением дать какую-то реальную модель небес, она лишь позволяла рассчитывать положение планет. Впоследствии примитивно мыслящие комментаторы превратили воображаемые птолемеевские эксцентры и эпициклы в хрустальные сферы. Возможно (замечания Р. Ньютона [34] требуют перепроверки), он же является отцом и метода массажа данных, когда данные слегка перевирают, чтобы они влезли в предлагаемую модель. Этот метод неотделим от метода компьютерного моделирования. Поскольку в данном случае мы занимаемся подгонкой на теоретическом уровне, очень соблазнительно заняться той же подгонкой и на уровне имеющихся данных, тем более, что современная статистика предлагает массу способов самооправдания путем отбрасывания нежеланных данных как ошибок либо высасывания из пальца[12] некоей систематической ошибки и затем корректировки данных.

Пожалуй, Птолемею принадлежит известное изречение о том, что в любой науке столько науки, сколько в ней математики [39, стр.].

Упражнения к §1.2

1.2.1. Постройте равносторонний треугольник с тремя прямыми углами.

1.2.2. А равносторонний треугольник с углами ε, где ε — сколь угодно малое положительное число?

1.2.3. Что значила знаменитая аксиома Евклида

$$\textbf{Целое больше части?} \tag{1.11}$$

1.2.4. Согласно легенде, Архимед воскликнул «Эврика!» и голым выскочил из ванны, когда в ванне ему пришло решение задачи, предложенной царем Гиероном: как определить, не подмешал ли ювелир в золотую корону серебро, чтобы нагреть себе руки сверх оговоренной платы, не повреждая самой короны? Архимед сообразил, что любое тело, погруженное в сосуд, налитый до краев, вытесняет из него объем воды, равный объему тела. Соответственно, можно бросить в сосуд корону, затем равное ей по весу количество золота, и, наконец, серебра, и, сравнивая три массы воды, решением простейшего линейного уравнения найти количество золота и серебра в короне. Ювелира казнили поделом, но в чем была логическая ошибка Архимеда и знаете ли Вы случай, когда она существенно влияет на результаты?

[12] Который здесь замаскирован под солидно выглядящие формулы, а в последнее время под использование какой-либо солидной программы.

1.3 Расширение чисел

Геометрические методы настолько закостенели после античности, что дальнейшее развитие математических идей шло по линии чисел.

Мусульмане (Ал-Хорезми, Омар Хайям и другие) развили систему действий над числами и систематизировали в алгебраической форме правила решения простейших уравнений. При этом они воспользовались заимствованной из Индии десятичной позиционной системой счисления (известной в европейском мире под именем арабских цифр). Заметим, что позиционная система счисления была известна и до них, астрономы при точных вычислениях либо вычислениях с большими числами издавна пользовались шестидесятеричной системой, берущей начало от вавилонян. Но, как обычно бывало в истории математики, улучшение системы обозначений дало возможность подступиться к многим новым принципиальным вопросам. Арабы стали понемногу расширять систему чисел, используя как промежуточные, а иногда и как окончательные, результаты вычислений отрицательные числа и 0.

Н. Тарталья и Дж. Кардано (XVI век, Италия), открывая методы решений уравнений 3-ей и 4-той степени, пришли к необходимости систематически использовать мнимые числа как промежуточные результаты вычислений. Тем самым был впервые *осознанно* применен в математике метод введения идеальных объектов с тем, чтобы перейти от одних реальных объектов к другим. Рассмотрим данный случай чуть подробнее.

Пусть дано уравнение $x^3 = ax + b$. Тогда, согласно формуле Тартальи,

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \tag{1.12}$$

Здесь подкоренные выражения могут быть мнимыми, а результат, тем не менее, действительный. Тарталья и Кардано пасовали перед подобными случаями, а болонский инженер Р. Бомбелли смело прошел дальше, и получил, в частности, для уравнения $x^3 = 15x + 4$, пройдя через промежуточное выражение

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

значение $x = 4$, доказав, что

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

Но не менее важно, что в то же самое время были развиты достаточно эффективные алгоритмы умножения и деления чисел, соединенные с методами быстрой проверки результата. Они были похуже тех, которым сейчас учат в школе, но тем не менее искусство вычислений было превращено в полностью передаваемое умение, описанное как знание и легко тренируемое до уровня навыка. В умножении и особенно в делении лишь к XVIII веку удалось превзойти египтян, пользовавшихся методом, независимым от системы счисления. Здесь арабские числа играли отрицательную роль, поскольку задача подменялась. Искали не очередное *приближение* к результату, а очередную *точную цифру* результата, что намного труднее. Так что *переход к более удобным обозначениям порою может повредить, поскольку возникает соблазн незаметно подменить цель, ориентируясь не на содержание задачи, а на конкретное представление результата*! Вообще, стоит заметить:

Привязка к конкретному представлению результата на слишком раннем этапе решения задачи — как правило, достаточно грубая методологическая ошибка. Конкретное представление нужно рассматривать лишь тогда, когда результат уже в принципе получен, и осталось реализовать его метод получения. (1.13)

Пример 1.3.1. *В составленных немцами со всей тщательностью в начале XX столетия десятизначных таблицах логарифмов составитель, желая подчеркнуть качество своей работы, указал, что последний знак всегда точен. Если нужно было,вычислялось и 15, и более знаков, а в нескольких случаях даже более 20. Ну что ж, люди добавили себе немало лишней работы…*

Таким образом, появилась возможность реально вычислять по сложным формулам. Но формул-то еще не было. Математические соотношения записывались словами, и лишь кое-где начали появляться значки для отдельных алгебраических операций.

Еще одним достижением, связанным с десятичной системой, было общее понятие десятичной дроби. Поскольку десятичных знаков можно было найти большее число, чем шестидесятеричных, и появились алгоритмы деления, наконец-то было осознано, что любые дроби представляются как периодические десятичные,[13] а иррациональные числа являются непериодическими десятичными дробями.

Рассмотрение бесконечных дробей было психологической подготовкой к переходу к рассмотрению актуально бесконечно больших и бесконечно малых величин, к следующему этажу идеальных объектов.

[13]Вавилоняне, поскольку деление производилось подбором, составляли таблицы обратных величин, и для некоторых из них периодичность уже наблюдалась в таблицах, но она нигде не отмечалась явно в текстах. Тем более не было результата о периодичности хотя бы любого обратного к целому числу, в частности, может быть, из-за того, что периоды шестидесятеричных дробей часто длиннее периодов десятичных, а практически требуемая (даже в астрономии) точность достигается гораздо быстрее.

1.4 Развитие формальной техники

В XVII веке начала создаваться современная математическая символика алгебраических равенств. Это завершило процесс популяризации чисел, работа с числами перешла в школы (в том числе и в начальные) из университетов, где первоначально обучали арифметике.

В основном нынешняя система аналитических выражений, которые обычно называют *математическими формулами*, сложилась в XVIII веке, хотя и дальше она претерпевала косметические изменения.

Математика не остановилась на эллинском уровне строгости, а сразу же превзошла его. Гаусс, Лобачевский и Бойяи построили неевклидову геометрию, подведя тем самым черту под идеей абсолютной априорности математических структур.[14] Паш нашел аксиому, не замеченную древними, но необходимую для построения геометрии.[15]

В середине XIX века математика начала заниматься не фиксированными объектами, а переменными структурами, имеющими одну и ту же форму. Появились кватернионы, p-адические и полиадические числа, понятие группы, алгебры, векторного пространства и т. д. Это было неразрывно связано с появлением нового класса доказательств — невозможности решения некоторых задач заданными средствами. Так, теория групп была применена для доказательства неразрешимости в радикалах уравнений степени выше четвертой, алгебраические числа — для доказательства неразрешимости циркулем и линейкой классических геометрических задач типа квадратуры круга и удвоения куба.

Если революцию XVII века в математике часто называют переходом от постоянных объектов к переменным величинам, то революцию XIX века, продолжающуюся непрерывно до сих пор, можно охарактеризовать как *поиск сохраняющихся свойств, инвариантов в переменных величинах и структурах*. Пожалуй, первым это явно заявил Риман в своей знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии».

Еще одним явлением, приобретшим первоочередную важность для математики, начиная с XIX века, стал поиск контрпримеров и неразрешимых проблем. Уже теорема о несоизмеримости диагонали со стороной была контрпримером, примером, опровергающим внешне привлекательную гипотезу о

[14] Правда, как было отмечено на стр. 9, эта идея появилась в результате профанации и абсолютизации эллинских достижений в геометрии, так что здесь эллинов превзошли еще ненамного, и лишь поздних, а не ранних.

[15] Формулировка данной аксиомы проста и поучительна.

> Если прямая пересекает одну из сторон треугольника, то она пересекает и какую-либо другую.

существовании абсолютной меры. Из нее выросла теория действительных чисел.

Из примера неразрешимого в радикалах уравнения выросла теория групп, из других примеров неразрешимых алгебраических и геометрических задач — многообразие числовых систем, используемых в современной математике. Из примера Вейерштрасса функции, не имеющей производной ни в одной точке — теория фракталов, ставшая основой многих разделов современной синергетики и машинной графики и т. п.

В математике перешли от содержательной аксиоматики к модельной и далее к формальной.

В модельной аксиоматической теории свойства описываемых объектов выражаются на математическом языке с использованием некоторых стандартных математических понятий, например, чисел. Таковы, в частности, современные аксиоматические изложения механики, электродинамики (законы Максвелла) и теории относительности.

В формальной аксиоматической теории явно задаются не только аксиомы, но ее язык и правила вывода, и в результате она превращается в исчисление. После такого превращения *в принципе* можно получать результаты по чисто формальным правилам, без всякой апелляции к содержательному смыслу. Но слова *в принципе можно* практически всегда в современной математике означают *ни в какой реальной ситуации, ни с какой разумной затратой ресурсов и надежностью нельзя*.

Одним из знаменитейших достижений XIX века явилась теория множеств. Ее новизна заключалась не в том, что стали рассматриваться множества как математические объекты (теория классов давно известна в традиционной логике и неоднократно начинала изучаться математическими средствами (Лейбниц, Эйлер, Больцано...)). Множества стали систематически использоваться как строительный материал для других множеств, и математика на базе теории множеств, обрисованная Г. Фреге,[16] стала напоминать гегелевскую

[16]Готтлоб Фридрих Людвиг Фреге (1848–1925, Германия) — один из основателей современного формального языка математики и современной математизированной философии. Его положение о том, что математик должен быть наполовину философом, а философ — наполовину математиком, показало свою плодотворность в течение XX века.

Его работы по основаниям математики впервые дали возможность конструктивно построить математические понятия на базе множеств. Формально его система, изложенная в книгах [61, 62], содержала противоречия, но большинство построений из нее были перенесены в современную теорию множеств, а грандиозный труд по непротиворечивому конструированию математики лишь из множеств был проделан на базе работ Г. Фреге Дж. Уайтхедом и Б. Расселом.

Стоит напомнить также, что Г. Фреге [54, стр. 32] первый стал ясно различать *смысл* и *значение* предложений, и четко заявил, что в науке можно иметь дело лишь с той частью смысла, которая может быть выражена через значения. Так что первое, от чего отвлекается

Вселенную, возникающую из Ничто (пустого множества) согласно законам логики.

В начале XX века математика вернулась к аксиоматическому методу на гораздо более высоком уровне. Формализована была основа математики, говоря терминами современной информатики, *язык-ядро*, в котором можно сконструировать любые математические понятия.[17] В качестве данного языка-ядро выступила теория множеств. Далее, уточнены были не только аксиомы, но и сам язык математики, которая превратилась в совокупность формальных систем.

Это уточнение потребовало от математики воспользоваться достижениями логики, и ныне математика и логика представляют собой две теснейшим образом переплетающиеся науки. Та часть логики, которая целиком укладывается в рамки математического мировоззрения, называется *математической логикой*. Если в самой математике продолжается движение в направлении, заданном в середине XIX века, то логика связала математику с целым рядом других наук и ремесел и производит революцию в рациональном научном мышлении, отнюдь не ограничиваясь самой математикой.

После брака между логикой и математикой появился новый класс математических выражений — логические формулы.

В середине XX века начали изучаться уже соотношения между самими математическими структурами (в логике и в теории категорий). В логике такие соотношения изучаются в теории определений и теории доказательств.[18]

Теория категорий была специально создана для изучения соотношений между математическими структурами, не зависящих от способа их определения. Было замечено, что каждая общепринятая математическая структура задает класс преобразований, при котором она сохраняется. Например, для геометрических фигур — это движения, вращения и отражения пространства. Для групп и произвольных алгебраических структур — гомоморфизмы (отображения, сохраняющие операции), и так далее. В теории категорий от

рациональная наука — от смысла.

[17] Мы не добавили ≪в принципе≫, поскольку это было *практически* проделано однажды в труде Дж. Уайтхеда и Б. Рассела [70]. Но, так же как должно быть и в информатике, после того, как построение было однажды проделано, другие воспользовались готовыми результатами и повторять его уже не стали. В информатике этому мешает отсутствие фиксированного языка. При постоянных сменах хотя бы ‘версий’ люди вынуждены все время повторять одни и те же построения, чуть-чуть их видоизменяя. Это — т. н. проблема переносимости программного обеспечения.

[18] Казалось бы, что их должна изучать теория моделей, поскольку математическая модель — представление некоей структуры в совершенно другой математической структуре. Но современная теория моделей занимается тонкостями одного из классов интерпретаций — интерпретации логических языков в терминах значений истинности. Поэтому она практически осталась в стороне от данного процесса.

математических структур остаются лишь их отображения, и подобие между классами математических структур сводится к подобию их отображений.

Как и в теории множеств, основной новацией теории категорий было не столько рассмотрение новых объектов, сколько их использование в качестве базы для новых построений. Эти построения базируются на еще одном новом классе математических выражений — диаграммах (коммутативных диаграммах, как их часто называют). Сами диаграммы становятся объектами новых категорий, и тем самым дают возможность удобно и кратко выражать крайне абстрактные понятия. Каждое понятие теории категорий, как правило, обобщает множество внешне абсолютно разнородных понятий из самых разных областей — от алгебры и логики до анализа и информатики.

Так что предмет математики по форме все время видоизменяется, оставаясь неизменным по существу.

В связи с этим *научные революции в математике связаны в основном с изменением трактовки некоторых результатов и отношения к их ценности*, а не с тем, что отвергается целый класс результатов и утверждаются другие, как в естественных и гуманитарных науках, .

1.5 Бесконечно малые: взлет, падение и возрождение

Поучительно рассмотреть исторически линию развития анализа с XVII до конца XX века.

Одновременно принципиально расширилась область математических структур. Были введены в рассмотрение функции, бесконечно большие и бесконечно малые величины. Математические построения, их изучающие, назвали анализом бесконечно малых. На основе анализа бесконечно малых было даны понятия предела, производной и интеграла, и математика стала адекватным инструментом для новой физики. Но методы работы с актуальными бесконечностями оставались не до конца уточненными,[19] хотя в XVIII веке была продемонстрирована их потрясающая эффективность. Но опасности, связанные с тем, что иногда с помощью данных методов получались совершенно абсурдные результаты типа $1-1+1-1+1-1+1\cdots = 0.5$ оставались, и поэтому возникла потребность вернуться к эллинским канонам строгости.

Это возвращение началось в XIX веке. Бесконечно большие и бесконечно малые были изгнаны из математики, прежде всего, трудами О. Коши. Анализ

[19]Епископ Дж. Беркли даже пытался применить внешнюю противоречивость действий с бесконечно малыми числами для доказательства существования Бога.

бесконечно малых стал называться просто математическим анализом. Понятия предела и производной были сформулированы без актуальных бесконечностей, но оказались намного более громоздкими и логически сложными.[20]

Пример 1.5.1. *В анализе бесконечно малых понятие равномерно непрерывной функции формулировалось*

> *Функция непрерывна, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение результата.*

то математики начала XIX века записали выражение равномерной непрерывности следующим образом:

> Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для аргументов, различающихся меньше, чем на δ, значения функции будут различаться менее, чем на ε.

(1.14)

В современном математическом анализе пишется формула, означающая то же самое, но несколько более обозримая и значительно более удобная для преобразований:

$$\mathrm{UCont}(f) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \, \forall y \, (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \,. \tag{1.15}$$

Правда, в анализе бесконечно малых понятия непрерывности и равномерной непрерывности не отделялись друг от друга, и осознать их разницу стало можно лишь после устранения идеальных объектов, поскольку сами эти идеальные объекты в те времена не были осознаны достаточно удовлетворительно. А после устранения идеальных объектов стало ясно, что, чуть-чуть видоизменив понятие равномерной непрерывности

$$\mathrm{Cont}(f) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \forall x \, \exists \delta > 0 \, \forall y \, (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \,. \tag{1.16}$$

получаем понятие непрерывности.

Выявление разницы понятий — одно из немногих мест, где устранение идеальных объектов доказало свою полезность. Но столь же часто это удается сделать, напротив, после введения новых идеальных объектов.

[20]Это явилось первым примером явления, подмеченного и систематически исследованного в XX веке методами математической логики. Результаты, полученные при помощи абстрактных идеальных понятий, часто можно *в принципе*, а иногда и реально, записать и обосновать без ссылки на высокие абстракции, но при этом и формулировки, и обоснования становятся намного более длинными и менее ясными.

Пример 1.5.2. *Когда в первой половине XIX века стало уточняться понятие непрерывности, появились два эквивалентных определения — непрерывность по Больцано-Коши и непрерывность по Гейне. Определение непрерывности по Больцано-Коши дано выше в (1.16). Содержательная формулировка непрерывности по Гейне следующая.*

> Функция f непрерывна, если для любой сходящейся последовательности ее аргументов a_n последовательность значений функции $f(a_n)$ сходится к значению функции от предела данной последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (1.17)

Иными словами

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n). \tag{1.18}$$

Понятия непрерывности по Коши и непрерывности по Гейне начинают различаться для общих топологических пространств (пространств с более чем счетной базой окрестностей).

Так что в вышеприведенном анализе и устранение, и введение идеальных объектов выступают как две стороны общего процесса варьирования представлений рассматриваемых сущностей. А именно привязанность к стандартному представлению, являющаяся одним из признаков рутинного мышления[21], мешает осознанию тонких различий в понятиях.

Более того, можно сформулировать следующую гипотезу:

> Если математическое понятие определено через стандартное представление, полностью явно и конструктивно, то это определение неадекватно.

Рассмотрим примеры.

[21]Рутинное мышление в данном контексте является психологическим термином, а не ругательством. Оно — вполне почтенный тип мышления, весьма выгодный при достижении четко поставленной цели в стандартных условиях, т. е. в большинстве ситуаций жизненного успеха. Творческое мышление, напротив, неоднократно доказывало свою вредность для достижения немедленного успеха, зато полезность при резком изменении ситуаций, целей и ценностей. (Именно в такой ситуации творческая личность порою и добивается успеха. Поэтому, сколько можно судить по интервью и публикациям, стиль мышления Билла Гейтса рутинный, а Джорджа Сороса — творческий.) И тот, и другой тип мышления необходим для выживания общества, и поэтому наиболее ценны как менеджеры люди, основной тип мышления которых рутинный, но обладающие способностями к творческому мышлению и некоторыми навыками его. *Эти способности им нужны чаще всего не для того, чтобы самим выработать новое нестандартное решение, а для того, чтобы вовремя осознать необходимость поиска такого решения, суметь сработаться с теми, кто его может найти, и творчески оценить предложенные варианты.*

Пример 1.5.3. *Декартово произведение $X \times Y$ множеств X и Y во всех учебниках и монографиях определяется как множество пар (x, y), таких, что $x \in X$, $y \in Y$. Но рассмотрим два произведения $X \times (Y \times Z)$ и $(X \times Y) \times Z$. Первое из них состоит из пар вида $(x, (y, z))$, а второе — из $((x, y), z)$. Очевидно, что две последние структуры данных различны.*[22] *Математики "изящно" обходят данный факт, заявив просто, что они «условились» считать произведения $X \times (Y \times Z)$ и $(X \times Y) \times Z$ одинаковыми.*

Заметим, что эта невинная «условность» полностью противоречит разобранным нами на стр. 28 свойствам равенства и детально разработанным в математике методам сделать объекты равными.

Пример 1.5.4. *Представление действительных чисел как бесконечных дробей в некоторой системе счисления хорошо работает как их формальное определение, но, поскольку при этом заодно навязывается внутренне не присущая действительным числам структура, оно начинает подводить при определении вычислимых функций действительных чисел (см., например, [50]).*

Пример 1.5.5. *Представление недостоверного знания, субъективного мнения или незнания при помощи теоретико-вероятностных числовых оценок и оперирование с данными оценками по правилам теории вероятностей и математической статистики стало практически стандартным методом математизации в гуманитарных дисциплинах и в «искусственном интеллекте». Рассмотрим элементарный случай, частенько встречаемый, но обычно маскируемый промежуточными выкладками, скрывающими тождество понятий. Пусть оценка достоверности A есть x. Тогда оценка $\neg A$ есть $1 - x$. Если связь этих понятий забыть, то оценка $A \Rightarrow A$ "вычисляется по правилам теории вероятностей" как $x \cdot (1 - x)$. Но на самом деле оценка данного утверждения 1.*

Далее, из учебника в учебник кочует задача по «прикладной теории вероятностей».

> Средняя продолжительность жизни человека 70 лет. Какова вероятность того, что он доживет до 20 лет?

Эти примеры можно было бы бесконечно продолжать, и для достаточно серьезных математиков стало практически общим местом критиковать бессмысленные и неверные применения вероятностных и статистических методов. Но воз и ныне не то, что там, а все дальше сползает в яму, поскольку такие методы закладываются в компьютерные программы, где они замаскированы, а наружу выходят лишь числовые оценки. А так хочется все

[22] Мы не зря воспользовались здесь термином из информатики *структуры данных*, поскольку именно в информатике их различие не подвергается никакому сомнению.

оценить числом, да предпочтительно меньшим 1, чтобы создать впечатление точности и одновременно остаться совершенно безответственным даже морально на случай ошибки, сказав, например:

Вероятность дождя — 0.2.

Актуальные бесконечности вернулись в математику лишь в начале 60-х гг. XX века после создания Р. Робинсоном нестандартного анализа. В нестандартном анализе используются мощнейшие методы и результаты современной математической логики и теории множеств. Бесконечные величины носят статус идеальных объектов, добавляемых к стандартным моделям таким образом, чтобы *не нарушилось ни одно математическое свойство, формулируемое внутри стандартной модели*. При этом возникают новые свойства, формулируемые с применением нестандартных объектов, в результате чего выразительность теории увеличивается, длина доказательств сокращается, но все, что сделано при помощи нестандартного анализа, *в принципе* можно проделать и внутри стандартного математического анализа. **Упра**

1.5.1. **Ошибка лорда Исаака Ньютона**.

Ньютон был гением, признанным еще при жизни. Родной университет дважды избирал его в парламент, а когда он убедился, что витающий в высотах науки гений не способен лоббировать их низменные, но насущные интересы, и не избрал его на третий раз, король сделал его лордом (что в те времена было исключительной честью).

На заседания палаты Ньютон неизменно ходил, но по собственной инициативе выступил всего один раз (знаменитая речь: «Достопочтенные лорды! Нельзя ли закрыть форточку: на меня дует.») Зато как эксперт он выступал неоднократно, и порою его выступления длились по три заседания. Чаще всего их результаты были просто блестящими. Например, Ньютон комплексно проанализировал работу английского монетного двора и повысил доходы от него чуть ли не в два раза (в частности, он доказал, что чеканить монету качеством и весом выше оговоренного стандарта выгодно, поскольку рынок еще преувеличивает достоинство такой монеты). Но однажды такой трехдневный доклад привел к конфузу.

В те времена остро стояла проблема уточнения карт. Широту мог измерить практически любой капитан, поймав астролябией Солнце в полдень либо Полярную звезду в северном полушарии. Зато долготу… Теоретически было известно, что достаточно иметь точные часы и замерить разницу между полуднем в данной точке и полуднем по стандартному времени. Часы уже были, но ходили они весьма неточно, особенно в условиях моря (сырость, качка и т. п.) Задача определения долгот была поручена лорду Ньютону, и тот выдал блестящее решение, идеальное с точки зрения чистой прикладной математики.

Поскольку часы неточные, но несколько-то часов удержать время они могут, то нужно найти способ корректировки часов. Для этого достаточно иметь процесс, часто повторяющийся, точно рассчитываемый методами тогдашней науки и наблюдаемый при помощи средств, которые имелись у любого капитана. Ньютон нашел его: затмения спутников Юпитера. Они наблюдаются в любую подзорную трубу, повторяются несколько раз за сутки, могут быть рассчитаны с точностью до секунд на годы вперед методами тогдашней небесной механики.

Доклад был воспринят на ура, правительство выделило солидный грант[23], были рассчитаны затмения спутников Юпитера (при этом попутно была уточнена скорость света), напечатан толстенный фолиант с их временем по Гринвичу на годы вперед и с инструкциями, как найти Юпитер на звездном небе, он был бесплатно роздан капитанам военных и ведущих гражданских судов. Результат оказался нулевым[24].

Последовательно задаются четыре вопроса.

1. Почему результат был нулевым?
2. Как можно было бы с теми же затратами тем же способом в то же время получить существенный положительный результат от проведенных работ?
3. Как можно было бы получить ненулевой результат и от капитанов (может быть, ценой минимальных дополнительных затрат)?
4. В начале XVII столетия такое же решение проблемы долгот предложил Галилей и пытался продать его голландцам, но те отказались: «Ваше решение слишком хитрое для такого грубого народа, как наши моряки». Кто был прав: Галилей или голландцы? Сравните на этом примере уровень Галилея и Ньютона как прикладных математиков, как информатиков и как организаторов *современной* науки.

[23] Сознательный анахронизм!

[24] Конечно, не считая того, что были получены существенные теоретические и вычислительные результаты в астрономии и физике. Я слышал (но не смог найти подтверждения в печатной литературе), что почти весь XVIII век многие *астрономы* пользовались ньютоновскими фолиантами для уточнения часов и для наблюдений затмений спутников Юпитера. Но не для них же английское правительство вкладывало большую даже по современным меркам сумму денег в работу!

Глава 2

Математика и реальность

2.1 Что такое математика?

Математика — наука, которая занимает уникальное место в общечеловеческой, и, в первую очередь, в европейской культуре. Она, с одной стороны, изучает *идеальные понятия*, заведомо отсутствующие в «реальном» мире, с другой стороны, дает результаты, приложимые к данному миру, и, более того, часто непостижимо эффективные. Математика является основой метода *формализации*, при формализации понятия сводятся к математическим.

Номенклатурные определения типа

> Математика — наука о числах и фигурах. (К. Маркс)

совершенно не могут ничего определить по сути. Они достойны бухгалтерского стиля мышления, который все классифицирует по формальным внешним признакам. Они падают при малейшем видоизменении поля деятельности математики.

Лучшее содержательное определение математики дано Р. Декартом:

> Математика — наука о порядке и мере.

Таким образом, пока в некоторой области нет порядка и меры, применять математику просто бессмысленно. Формулы будут в лучшем случае узором, украшающим текст.

Заметим, что в данном определении нельзя впадать в порочный круг, подставляя в него точные понятия порядка и меры, выработанные в самой математике. Под порядком может подразумеваться здесь любое уяснение структуры исследуемых понятий, как, например, в когнитивной науке — описание на языке математической логики, а в лингвистике — построение формальной грамматики. Аналогично, мера — это уточнение предпочтений, ясное понимание того, что хуже, что лучше, что более нужно, что менее нужно, что более допустимо, что менее допустимо *в данной ситуации и для данной цели*. Например, мерой в информатике часто служит возможность перевести понятия и результаты на алгоритмический язык и сложность получившейся программы.

Приведенные рассмотрения подводят к другому описанию математики, которое можно сформулировать следующим образом:

> Математика — наука, изучающая объекты, свойства которых строго сформулированы.

Здесь подчеркивается, что математика имеет дело лишь с формализованными понятиями. Заодно это описание показывает, почему столь расширилась сфера применений математики, столь увеличилось разнообразие математических описаний за последнее время.

Это описание поля деятельности математики не претендует на большую ограничительность. Оно, скорее, достаточно широко и отбрасывает лишь те случаи, когда говорить о применении математики еще рано.[1] Оно включает и традиционные разделы, такие как геометрия и алгебра, и новые, такие как математическая лингвистика либо теория генетического кода.

Определение, данное Н. Бурбаки, на первый взгляд выглядит порочным кругом либо трюизмом:

> Математика — наука о математических структурах.

На самом деле именно оно является ограничительным и дало толчок исследованию общего понятия математической структуры. Оно подчеркивает разницу между математикой и такими математизированными науками, как многие области современной философии, когнитивная наука, те области искусственного интеллекта (ИИ), где ИИ является точной наукой. Из него следует, что *математика изучает не любые формализованные понятия, а те, которые естественно входят в традиционно сложившуюся систему математических понятий*. Если философ либо искусственный интеллектуал создал исчисление, оно становится формализмом, но входит в область интересов математиков лишь после того, как устанавливаются взаимосвязи между структурами, порождаемыми данным определением, и традиционными математическими структурами.

---

[1] Тем не менее и там вовсю пытаются применять математическую символику, используя, как остроумно выразился Леви-Стросс, «формулы как узор, украшающий текст». В частности, таковы многие современные работы по культурологии, философии и т. п. Критерий распознавания математизированного наукообразия прост: понятия не уточняются. Далее, часто квалифицированный математик легко находит противоречия в узорах, вставленных в текст. Но порою узоры внутренне непротиворечивы и просто не имеют отношения к окружающему их тексту.

Четвертое определение дается (обычно устно и по частям) большинством преподавателей математики и, во всяком случае, определяет математику в восприятии среднего математика.

> Математика — наука о решении математических задач. Математические задачи — задачи, сформулированные крупными математиками.

Здесь возникает вопрос, а кто же имеет право формулировать математические задачи? И естественно приходят к легендарному определению математики, данному академиком Марковым:

> Математика — то, чем занимаются Чебышев, Ляпунов, Стеклов и я.

Ну что ж, важность авторитета ведущих ученых в математике такое определение прекрасно подчеркивает, равно как и опасности, связанные с подходом от авторитетов.

2.2 О мировоззрении математиков

> …Трудность состоит даже не в том, чтобы понять сказанное автором, но чтобы понять невысказанное им. Это же касается не сознательно принимаемых допущений, но тех, которые принимаются им неосознанно. Мы сомневаемся не в честности автора. Мы критикуем лишь его проницательность. Каждое поколение критикует бессознательные предпосылки мышления своих отцов. Иной раз они сохраняют свое значение, но при этом получают явное выражение.
>
> Дж. Уайтхед. [49, стр. 80]

Уже из выше приведенных определений видно, что математика — это не просто наука, а вдобавок система традиций, ценностей, восприятия и даже мировоззрения целого научного сообщества. Эти два аспекта стоит отличать друг от друга, но они, конечно, тесно взаимосвязаны.

Их взаимосвязью служит пока еще сохранившаяся в математике система научной этики, практически утерянная в нынешней прагматизированной и милитаризованной науке[2]. Научная этика математика включает следующие аспекты.

[2] В последние годы автор заметил, анализируя математические журналы, что и в математике эта система стала стремительно разрушаться под влиянием системы грантов. Появились давно замеченные автором в других науках циклы в 12 и 24 года публикации под новым именем и с новой терминологией старых результатов, уже забытых рецензентами.

Математику неприлично заниматься тем, что не допускает точной формулировки, и самому формулировать утверждения, которые могут быть поняты двояко. Ему неприлично выдавать правдоподобное утверждение за доказанное, он имеет право утверждать лишь то, для чего он имеет полное доказательство. Ему нельзя утаивать открытое им доказательство, он обязан предоставить его на максимально широкое обсуждение, для проверки всеми заинтересованными лицами. Если кто-то нашел ошибку в доказательстве, математик не имеет права настаивать на своем, а обязан поблагодарить за помощь и публично объявить о своей ошибке и пересмотреть доказательство либо формулировку теоремы. Если кто-то нашел опровергающий пример для доказанного им утверждения, автор доказательства даже не имеет права требовать, чтобы нашли еще и ошибку в его доказательстве, текст, объявленный доказательством, уже никого не интересует. Эти достаточно точные и строгие критерии показывают, почему именно в среде математиков устойчивей всего сохраняется понятие научной этики и чести ученого. А без этих понятий любая наука мертва. Но научная этика, даже сохраненная в полном объеме, отнюдь не исчерпывает человеческой; безупречно честный в науке человек может быть подонком в жизни…

Математика — не только наука и мировоззрение, но и язык. Пожалуй, впервые это явно произнес Гельмгольц. Он, будучи одним из крупнейших физиков XIX века, традиционно молчал на заседаниях Ученого Совета своего университета, обсуждавших в основном гуманитарные вопросы. Но однажды, когда гуманитарии стали обсуждать вопрос об увеличении преподавания классических мертвых языков за счет урезания математики, он не выдержал и сказал кратко и ясно:

> Математика — это язык!

Это в особенности следует из второго определения, поскольку в нем требуют уточнения в первую очередь слова: “точно сформулированы.”

Охарактеризуем (*в принципе*) поведения математика во время научных дискуссий и обсуждений, вытекающее из приведенных нами описаний математики. Нижеследующие зарисовки не противоречит тому показу внутреннего мира математического сообщества, которое дал А. Гротендик в [10]. Кажущиеся противоречия являются скорее смещением акцентов, поскольку мы описываем не столько взаимодействие математиков между собой, внутри сообщества, сколько проблемы, возникающие на границах математического сообщества, при его соприкосновении с другими группами людей.

Точность математических формулировок и лапидарность математического языка заставляет математика внимательнейшим образом выслушивать предложения, высказанные другими *математиками*, и не стесняться переспросить, если чего-то не расслышал или не понял. Весьма часто от перестановки пары слов меняется смысл математического утверждения.[3] Но математики владеют не только искусством точно и порою весьма кратко формулировать свои мысли[4], но и *умением преобразовывать высказывания таким образом, чтобы точный смысл их оставался неизменным*. Поэтому математик не держится за конкретные слова, но ни за что не отступает от их значения.

Пример 2.2.1. *Порою внешняя форма утверждения при эквивалентных переформулировках меняется настолько, что нематематик даже не может понять, связаны ли они вообще. Скажем, принцип возвратной индукции*

> Свойство, выполненное для любого элемента, если оно выполнено для всех меньших его, выполнено для всех элементов данного упорядоченного множества. (2.1)

и принцип бесконечного спуска

> Если для любого элемента, обладающего данным свойством, можно найти меньший его, тоже им обладающий, то данное свойство никогда не выполнено. (2.2)

являются контрапозициями друг друга, что видно из их записи на формальном языке:

$$\forall x\,(\forall y\,(y \prec x \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x), \tag{2.3}$$
$$\forall x\,(A(x) \Rightarrow \exists y\,(y \prec x \,\&\, A(y))) \Rightarrow \forall x\, \neg A(x). \tag{2.4}$$

Математический язык бывает порою настолько лапидарен и выразителен, что малюсенькое предложение требует длинного содержательного комментария.

Рассмотрим простейший пример бездн, открывающихся за исходными математическими понятиями, на примере фундаментальнейшего из математических отношений — равенства.

Пример 2.2.2. *Равенство играет в языке математики особую роль. Если два объекта объявляются равными в некоторой математической теории, то их свойства в этой теории неразличимы. Другими словами, если мы, как говорят в математике, отождествляем какие-либо объекты, мы одновременно запрещаем себе использовать в наших строгих математических рассуждениях какие-либо свойства, различающие эти объекты.*

---

[3] Впрочем, точно так же на самом деле происходит и в жизни.

[4] Временами настолько точно и кратко, что требуется многочасовое разъяснение неспециалистам.

Например, поскольку треугольники, имеющие одни и те же вершины, отождествляются, мы не можем в геометрических доказательствах различать их тем, что у одного сначала была проведена сторона AB, а затем AC, а у другого — наоборот. Способ, которым они были начерчены, роли уже не играет.

Г. Лейбниц превратил это свойство равенства в его содержательное определение:

> Два предмета равны, если они обладают одинаковыми свойствами.

Но никакие два предмета не могут обладать всеми одинаковыми свойствами, поскольку уже в формулировке Лейбница они различаются. Поэтому на современном математическом языке формулировку Лейбница записывают в виде формулы, весьма естественной, но не укладывающейся в стандартный язык логики первого порядка:

$$\forall P(P(x) \Leftrightarrow P(y)) \Leftrightarrow x = y. \tag{2.5}$$

Здесь P — переменная по предикатам.[5]

Таким образом, в математическом утверждении можно заменить равные объекты друг на друга, и мы получим эквивалентное утверждение. Например, утверждение, говорящее о числе '4', мы можем заменить на эквивалентное утверждение, говорящее о выражении «$2 + 2$». Но в обычном языке не всегда так. Можно сказать, что «Вовочка не знал, что $2 + 2$ — это четыре», но нельзя — «Вовочка не знал, что $2+2$ — это $2+2$». Высказывания, выдерживающие замену равных, называются экстенсиональными. Иногда свойство экстенсиональности содержательно комментируют как зависимость высказывания лишь от объема входящих в него понятий, но не от их содержания. Соответственно, высказывания, меняющие значение для равных объектов, называются интенсиональными, зависящими от содержания.

Мы пришли к выводу, что использование равенства безусловно запрещает применение интенсиональных высказываний. Но ситуация еще жестче.

---

[5] Это внешне безобидное расширение математического языка сразу же было предложено авторами языка логики, но уже один из них — Б. Рассел — заметил глубоко спрятанные сложности при рассмотрении кванторов по предикатам. А сейчас стало известно, что в языке с кванторами по предикатам легко сформулировать утверждение, истинность которого эквивалентна неразрешимой математической проблеме. Доказано также, что для такого расширения языка не может быть полной системы формальных доказательств, которая имеется в обычной логике.

Чтобы придать точный смысл формуле (2.5), необходимо определить универс, который пробегают кванторы по предикатам, а, значит, точно ограничить, какими же именно свойствами мы пользуемся в данной математической теории. Поэтому часто формулировку Лейбница записывают в виде схемы аксиом

$$\forall x, y(x = y \Rightarrow (\mathfrak{A}(x) \Leftrightarrow \mathfrak{A}(y))). \tag{2.6}$$

Здесь метапеременная $\mathfrak{A}$ *пробегает по всем формулам языка данной теории.*

Заметим, что эта формулировка соответствует лишь одной из частей определения Лейбница. Другая его часть вообще не переводится на язык логики предикатов, и ее выражение приходится отыскивать отдельно для каждой теории. Так, например, для теории множеств им служит аксиома объемности[6]

$$\forall x, y(\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow \forall z(x \in z \Leftrightarrow y \in z)). \tag{2.7}$$

В данном случае для выражения утверждения о том, что множества с одними и теми же элементами равны между собой, воспользовались тем, что теория множеств в принципе может быть изложена с использованием лишь одного фундаментального отношения — принадлежности. Если не пользоваться данным предположением, то формулировку аксиомы объемности можно видоизменить следующим образом:

$$\forall x, y(\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y). \tag{2.8}$$

Оборотной стороной данных положительных качеств математического языка и математического способа выражения является то, что зачастую математик, заметив малейшую неточность в словах собеседника либо не получив удовлетворительного разъяснения возникшей неясности, просто отказывается слушать и понимать его дальше. Часто в таких случаях под неточностью понимается и просто отклонение от некоторых канонов (явно нигде не записанных), выработанных для изложения математических утверждений. Таким образом, математическое мышление стимулирует заодно и нетерпимость к малейшим отклонениям от некоей традиции, которую математик считает абсолютной.[7]

[6] Пожалуй, явно выделил данное предположение Г. Фреге.

[7] В оправдание здесь можно добавить, что, как уже было сказано раньше, *слушать* и *понимать* со стороны математика означает гораздо большую степень вовлеченности в разбор тонкостей построений собеседника и детальности их анализа, чем это принято, скажем, в философии. Поэтому математиков, выступающих перед философской аудиторией или, наоборот, пытающихся слушать сообщения философов, часто шокирует невнимание людей другой культуры к их высказываниям, способность не дослушать предложение либо перепутать в нем самые важные слова, соединенная с сильнейшей привязанностью к своим кон-

Приведем несколько примеров недопонимания между математиками и представителями других профессий.

Пример 2.2.3. *Большинство математиков не воспринимают определение Декарта, поскольку слова «порядок» и «мера» давно уже превратились в математические термины, и в математическом понимании они отнюдь не исчерпывают собой всей математики.*

Заметим, что в этом непонимании есть и позитивные черты. Если математик говорит, что имеется хотя бы частичный порядок, он точно осознает, что рассматривается некое транзитивное отношение, и поэтому, в частности, он может сказать, что человеческие предпочтения неупорядочены, поскольку имеет место парадокс предпочтения:

> *Некое лицо (либо совокупность лиц) A предпочитает B, B предпочитает C, но C предпочитает A.*

Далее, математик сразу же отказывается понимать, скажем, словосочетание «наилучший из возможных миров», потому что не верит, что отношение предпочтения упорядочено, и поэтому отказывается, даже веря в Бога, считать, что наш мир — Лучший из Возможных Миров, поелику другого Бог не мог сотворить. Другое дело, что он может верить, что никакой другой сотворенный мир не лучше нашего, но опять-таки не для отдельной личности, а с точки зрения Мирового Порядка.

Пример 2.2.4. *Для математика вполне естественно утверждение, что модели, называющиеся ныне моделями Крипке, на самом деле изобретены на несколько лет раньше П. Дж. Коэном. Он ввел данную математическую структуру и успешно применил ее, показав, что она дает интерпретацию интуиционистской логики и использовав ее в построении модели, опровергающей выводимость аксиомы выбора и/или континуум-гипотезы из остальных аксиом теории множеств.*

В то же самое время философы (как с удивлением обнаружил автор при разборе одной из своих статей в «Философскую энциклопедию») пользуются другим критерием. Поскольку семантика Крипке определена как семантика возможных миров, они ищут в сочинении Коэна слова «возможный

кретным фразам и с нетерпимостью к любой попытке переформулировать их, чтобы лучше понять. Математический разговор практически всегда диалог, а не монолог. Математика не нужно перебить, чтобы остановить. Он всегда готов ответить на уточняющие вопросы.

Один из философов в ответ на подобные соображения высказал замечание, что математический диалог с точки зрения философов скорее коллективный монолог, поскольку слишком мало различаются основания и цели, преследуемые разными его участниками. Но ведь разумный спор, в котором порою может родиться нечто, напоминающее истину не только по форме, всегда носит такой характер, даже если *по видимости* позиции его участников вначале выглядят чуть ли не противоположными.

мир» или нечто им подобное, и, не найдя никаких упоминаний о мирах, видя лишь конкретные точные математические структуры, отказываются воспринимать вынуждение по Коэну как модель Крипке, несмотря на математический изоморфизм данных понятий.

Таким образом, даже когда философ не рассматривает текст сам по себе, он все равно ориентирован не на его смысл, а на некий метатекст.[8]

Пример 2.2.5. *Для математика вполне естественна фраза, которой крупнейший русский математик П. Л. Чебышев начал свою популярную лекцию в Париже «Математические основы раскроя одежды»:*

— Для простоты примем, что человеческое тело имеет форму шара.

Столь же естественно, что все портные после этой фразы покинули зал.

Математическое мировоззрение отличается от мировоззрения представителей как гуманитарных, так и естественных наук. Оно гораздо менее подвержено соблазнам примитивного материализма либо квазирелигии прогресса, чем мировоззрение естествоиспытателей, и гораздо менее склонно к построению произвольных химер, чем мировоззрение гуманитариев. Те понятия, которые лежат в основе математики, хотя и не существуют в реальном мире, представляются для математика настолько устойчивыми и осязаемыми сущностями, что он невольно склоняется к примитивно понимаемому *платонизму*: верит, что идеальные объекты, созданные математикой, действительно существуют. Более того, он уверен, что их бытие более высокого порядка, чем бытие т. н. реальных объектов. Если Москва могла и не быть столицей России[9], то 2×2 не может оказаться равно 5 (1 еще может, при действиях по

[8]Заметим, что 'смысл', который ищет математик, тоже отличается от смысла, который ищет хороший гуманитарий (средний только рад постмодернистскому постулату, что в текст можно вчитать любой смысл, поскольку такая точка зрения оправдывает абсолютно бессмысленные, но красиво и солидно звучащие тексты). Это показано, в частности, на примере с моделями Крипке. Коэн, действительно, даже не проводил аналогии между своими интерпретациями и гуманитарной концепцией возможных миров. Заслуга Крипке состоит в систематизации и популяризации концепций, высказывавшихся до него обрывками, и в показе того, что данная математическая структура имеет громадную общность и может служить переводом на точный язык понятия *«система возможных миров»*, рассматриваемого в самых разных контекстах. При этом данная популяризация (с точки зрения профессионального математика) явилась с точки зрения философа либо лингвиста математизацией и формализацией их концепций, поскольку она была проделана со всей необходимой математической строгостью. Словом, С. Крипке успешно навел мосты между гуманитарными и идеальными понятиями. Именно такие мосты и нужны хорошему гуманитарию. Математик же довольствуется идеальными структурами самими по себе, и наводит мосты в первую очередь между идеальным и другим идеальным.

[9]И спасением для России сейчас будет, если она вновь перестанет ею быть.

модулю 3). Если же он отказывается от данной веры, принимая позицию *позитивизма* либо *структурализма*, то он сразу же оказывается в тупике: от математики остается вроде бы только игра по каким-то достаточно строгим, но непонятно кем установленным правилам. Поэтому разберем взгляд на собственную науку типичного математика, отвлекаясь от многочисленных частностей, которые, конечно же, бесконечно варьируются.

Типичное мировоззрение математика является гибридом квазирелигии и спорта.

Математическая квазирелигия — вера в то, что идеальные понятия, изучаемые математикой, являются сущностями высочайшего порядка, чистыми Идеями. Она полезна в том отношении, что не позволяет математикам скатиться на примитивные позиции типа постмодернизма, поскольку даже самому тупому математику ясно, высшие сущности не терпят примитивного клоунского осмеяния и, конечно же, несмотря на любые теоремы разных там Гёделей о неполноте, не являются предметом чисто субъективного выбора.[10] Данная квазирелигия вредна в том отношении, что является проявлением человеческой гордыни: то высшее, что мы открыли, и есть высшие Идеи. Бог — это все таки не Число. Эта квазирелигия часто называется *(математическим) платонизмом*. Мы будем называть ее *вульгарным платонизмом*.

Математический спорт — система оценки математических результатов. Перечислим их в порядке убывания оценки.

1. Самое высшее достижение — решение задачи, давно поставленной знаменитым ученым и остававшейся без ответа.

2. Далее, ответ на вопрос, поставленный авторитетом.

3. Далее, усиление либо переформулировка результата, доказанного авторитетом, лучше всего, одобренная авторитетами.

4. И на последнем месте — задача, формулировку которой дал сам молодой математик; чаще всего такая работа признается лишь после положительной оценки авторитета).

Такой уникальный агрегат, казалось бы, двух концептуально противоречивых понятий позволил взаимно скомпенсировать многие их недостатки и создать здание современной математики. Но оно на самом деле не зависит ни от той, ни от другой популярной опоры.

Суммируя основные положительные стороны математической квазирелигии, можно дать следующее более умеренное и альтернативное описание причин эффективности математики.

[10]Те, кто лишены чувства юмора, имеют право обидеться на данный пассаж.

Платонистская основа. Системы, возникающие в реальном мире, являются реализациями общих Идей. Сами эти Идеи недоступны человеку, поскольку они бесконечно совершенны, а человек несовершенен и ограничен, но математика дает возможность некоторого приближения к ним. Конечно же, эти приближения также несовершенны, но они гораздо более гармоничны внутри себя, чем т. н. реальный мир, почему и вскрывают самые глубинные свойства этого и других возможных миров. В этом причина непостижимой эффективности математики в приложениях. Но несовершенство человека проявляется в том, что Идеи могут быть реализованы в математике разными способами, противоречащими друг другу, это касается и тех фундаментальнейших Идей, которые лежат в основе логики.

Говоря терминами Канта, Идеи являются вещами в себе, а их конкретные реализации — вещами для нас. В этом смысле математика *частично априорна, поскольку опирается на Идеи, но не может считаться априорной при выборе их реализаций*.

Поскольку математические идеи возникают как ипостаси Идей в нашем познании, выбор их ни в коем случае не произволен, что доказывается колоссальной трудностью создания новых математических структур. Таким образом, вариантность высших степеней познания не означает снижения ответственности и аккуратности при их развитии.

Системная основа (умеренно материалистическая). Система базируется на фундаментальных структурах и не может существовать без порядка, обеспечиваемого этими структурами. Математика позволяет нам сделать шаг к выявлению фундаментального порядка, на котором базируется Вселенная. Но поскольку человек является несравненно более простой структурой, чем Мир, а никакая система не может познать даже саму себя, не говоря уже о более сложных системах, то человек не может полностью выявить данные структуры и вынужден ограничиваться приближениями. Поэтому математика весьма эффективна, но математические выводы нуждаются в перепроверке. По этой же причине математика не может быть полностью унифицирована, так как для разных целей нужны разные приближения.

≪Полное понимание — это совершенное схватывание Вселенной во всей ее тотальности. Но мы конечные существа, и подобное схватывание нам не дано… То, что существует, может быть познано в зависимости от его связи со всеми остальными вещами. Другими словами, мы способны знать все о некоторых его перспективах.≫ [49, стр. 91][11]

[11] Заметим, что Уайтхед поднимает еще один важнейший вопрос, легко решаемый с данной точки зрения и требующий более глубоких исследований для того же вывода, если оставаться на платонистской точке зрения. Мы конечны. Можем ли мы хотя бы бесконечно приближаться к Истине? Ответ однозначный: ***нет***! Мы можем создавать лишь ее срезы в данном

Соображения Пуанкаре (умеренно позитивистские).

≪Сначала нам представляется, что теории живут не долее дня и что руины нагромождаются на руины. Сегодня теория родилась, завтра она моде, послезавтра она делается классической, на третий день она устарела, а на четвертый — забыта. Но если всмотреться ближе, то увидим, что так именно падают, собственно говоря, те теории, которые имеют притязание открыть нам сущность вещей. Но в теориях есть нечто, что чаще всего выживает. Если одна из них открыла нам истинное отношение, то это отношение является окончательным приобретением; мы найдем его под новым одеянием и в других теориях, которые будут последовательно водворяться на ее месте.≫ ([41, стр. 278])

≪...Каков критерий их[12] объективности?

Да совершенно тот же самый, как и критерий нашей веры во внешние предметы. Эти предметы реальны, поскольку ощущения, которые они в нас вызывают, представляются нам соединенными, я не знаю каким-то неразрушимым цементом, а не случаем дня. Так и наука открывает нам между явлениями другие связи, более тонкие, но не менее прочные; это — нити, столь тонкие, что на них долгое время не обращали внимания; но коль скоро они замечены, их нельзя уже не видеть. Итак, они не менее реальны, чем те, которые сообщают реальность внешним предметам. Не имеет значения то обстоятельство, что о них позже узнали, так как они не могут погибнуть ранее других.

Можно сказать, например, что эфир имеет не меньшую реальность, чем какое угодно внешнее тело. Сказать, что такое-то тело существует,— значит сказать, что между цветом этого тела, его вкусом, его запахом есть глубокая, прочная и постоянная связь. Сказать, что эфир существует — значит сказать, что есть естественное родство между всеми оптическими явлениями.[13]

Продукты научного синтеза в некотором смысле имеют даже бо́льшую реальность, чем плоды синтетической деятельности здравого смысла, так

отношении. В данном пункте мы принципиально расходимся с фаллабилизмом.

[12]Научных понятий и отношений. (авт.)

[13]Громадным соблазном было бы опустить данный абзац, как заблуждение гения, и перейти к последующему. Но обратите внимание, в каком смысле А. Пуанкаре использует понятие ‘эфир’. Как взаимосвязь между различными явлениями он все время возрождается в современной физике под именами ‘*пространство-время*’, ‘*физический вакуум*’ и т. п. Таким образом, Пуанкаре говорил здесь не столько о конкретном физическом понятии, сколько об отношении, и в данном смысле нельзя сказать, что он неправ, поскольку конкретный термин ‘эфир’ вышел из моды в современной физике. Так что данный абзац является великолепным подтверждением предыдущего.

как первые охватывают большее число членов и стремятся поглотить частичные синтезы.

Нам скажут, что наука есть лишь классификация и что классификация не может быть верною, а только удобною. Но это верно, что она удобна; верно, что она является такой не только для меня, но и для всех людей; верно, что она останется удобной для наших потомков; наконец, верно, что это не может быть плодом случайности.

В итоге единственной объективной реальностью являются отношения вещей, отношения, из которых вытекает мировая гармония. Без сомнения, эти отношения, эта гармония не могли бы быть восприняты вне связи с умом, который их воспринимает и чувствует.

Тем не менее они объективны, потому что они общи и останутся общими для всех мыслящих существ.» ([41, стр. 279])

И, наконец, приведем соображения И. Канта, по сути дела обосновывающие ту же точку зрения такими же нейтральными средствами.

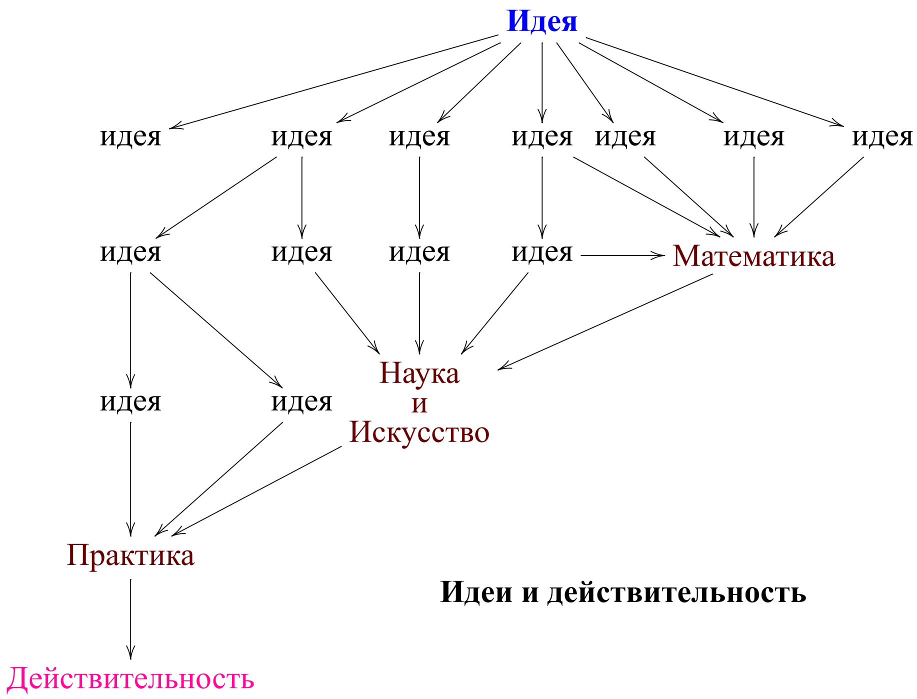
«...Вправе ли я рассматривать имеющие целесообразный вид устроения как замысел, выводя их из божественной воли, хотя и с помощью особых задатков, заложенных для этого в мире? Да, вы можете это делать, однако так, чтобы *для вас было все равно, утверждают ли, что божественная мудрость все так устроила для своих высших целей или же что идея высшей мудрости есть регулятивный принцип в исследовании природы и принцип систематического и целесообразного единства ее согласно общим законам природы даже там, где мы не замечаем этого единства*...»[14] ([16, стр. 371])

«Действительно, регулятивный закон систематического единства требует, чтобы мы изучали природу так, *как если бы* повсюду бесконечно обнаруживалось систематическое и целесообразное единство при возможно большем многообразии; ибо, хотя мы можем узнать и открыть только малую долю этого совершенства мира, тем не менее законодательству нашего разума присуще везде искать и предполагать его; руководствоваться этим принципом при исследовании природы всегда должно быть полезно, и никогда не может быть вредно. Но из такого представления о положенной в основу идее высшего творца ясно, что я полагаю в основу не существование такого творца и знание о нем, а только идею его и, собственно, делаю выводы не из этой сущности, а только из ее идеи, т. е. из природы вещей в мире согласно такой идее.» ([16, стр. 372])

Несколько слов о самом имени «платонизм». Из диалогов Сократа, написанных Платоном, отнюдь не следует, что геометрические понятия являются

[14]Курсив автора.

непосредственно высшими Идеями. Они лишь несравненно более совершенное приближение к некоторым из простейших Идей, чем реальные объекты. См. иллюстрацию 2.9.



(2.9)

Идеи и действительность

Геометрические объекты являются реализациями Идей, считанных по пальцам и хорошо согласующихся при практически любой разумной интерпретации. Реальные же реализуют громадное число таких Идей, практически все разъяснения и уточнения которых кажутся человеку противоречивыми. Поэтому на самом деле степень совершенства живого организма значительно выше, чем математической конструкции. Но понять, что есть совершенство, легче всего[15] на очищенных от множества побочных эффектов идеальных объектах. Поэтому *платонизмом* можно называть любое мировоззрение, которое не верит в произвольный выбор идеальных понятий, а считает, что они являются результатом усилий людей проникнуть к Идеям с большой буквы. При этом отнюдь не обязательно, чтобы, как в вульгарном платонизме, открытые человеком идеальные понятия возводились в ранг Идей и становились тем самым идолами.

По этим причинам автор не возражает, если его мировоззрение будут называть платонизмом, можно с добавлением ругательного прилагательного типа «умеренный», «оппортунистический», «скептический».

---

[15] *Легче всего* отнюдь не всегда означает *лучше всего*!

2.3 Формализация

Формализация — один из основных инструментов современной науки, пожалуй, один из наиболее острых (и, соответственно, обоюдоострых.)

> Формализация состоит в замене содержательной задачи на точно поставленную, содержательного утверждения на математически интерпретируемое таким образом, чтобы *по мере возможности сохранялись существенные для нынешней цели свойства*.

Почему невозможно потребовать большего, например, чтобы формализованное выражение было бы приближением к содержательному? Это связано с эффектом *неформализуемости*, имманентная природа которого была впервые в европейской науке вскрыта К. Гёделем. Далее, пытаясь сфотографировать действительность, улучшить приближение, мы быстро теряем эффективность и даже адекватность формализации. Излишнее внимание к мелочам всегда мстит за себя уничтожением главного. Поэтому успешная формализация всегда является карикатурой на действительность, остро подчеркивающей существенные для данного момента черты, и не стесняющейся связанных с ними недостатков. Например, что может быть нереальнее предположения: «Любое утверждение либо истинно, либо ложно»? Но оно привело к классической логике, являющейся самой применимой и успешной из логических систем.

Формализация имеет дело со смыслом лишь постольку, поскольку она может превратить его в значения.

В связи с понятием формализации есть один аспект, на который обратил внимание О. Вылегжанин. Гуманитарии часто понимают формализацию как наличие большого числа формул и других математических символов. Текст, включающий в себя формулы, даже составляющие основную часть его смысла, тем не менее может быть полностью неформальным, как, например, многие физические работы. Здесь смысл остается ведущим, хотя он и выражается через значения. А если (что типично для гуманитарных работ) формулы плохо связаны со смыслом, то лучше бы их вообще не было.

Так что слово '*формализация*' — еще одно из тех, которые математики и гуманитарии понимают в корне различно.[16]

[16] Данное замечание не относится ко многим представителям современной философии, структурной лингвистики и когнитивной науки. Зато оно типично для большинства культурологов, социологов, экономистов, юристов. Да и в науках первого разряда оно также встречается, и зачастую наиболее невежественные люди наиболее агрессивно пользуются квазиматематическими украшениями своих бессмысленных текстов.

Поэтому стоит помнить, что формализация *никогда не придаст смысла тексту*. Смысл ему придает то, что окружает данную формализацию.[17]

Разберем положительные и отрицательные эффекты формализации подробнее. Перечислим некоторые положительные стороны.

1. Формальная наука отличается тем, что она проверяет прежде всего форму и поэтому может рассуждать про глокую куздру из знаменитого предложения академика Л. Я. Щербы: ≪*Глокая куздра штеко бдыланула бокра и кудрячит бокренка*≫ столь же уверенно, как про сивую кобылу.

2. Выписываются те предположения, при которых делаются выводы (например, что субъективная привлекательность суммы денег прямо пропорциональна количеству денег).

3. Понятия превращены в термины, так что не может возникнуть никаких двусмысленностей при истолковании (например, интеллектуальность понимается как способность решать задачи из заданного тестового набора).

4. Можно проверить, действительно ли сделанный вывод строго следует из принятой модели или же автор выдвигает лишь правдоподобную гипотезу.

5. Формализованная и уточненная интерпретация часто заставляет сделать нежелательные выводы, и тем самым служит мощным инструментом дальнего предупреждения о возникающих опасностях. Например, отсутствие состояния глобального равновесия в мире с одним центром силы позволяет оценить мудрость спартанцев, не уничтоживших Афины как великую державу в масштабах Эллады, поскольку ≪Эллада на одной ноге не устоит≫.

6. Резко облегчается переход к структурам, приспособленным для интерпретации на компьютере.

Список преимуществ можно было бы продолжать бесконечно, но каждое из них неуклонно сопровождается соответствующим недостатком. Например, данным преимуществам соответствуют следующие недостатки.

1. Поскольку можно рассуждать про любые термины, проявляется тенденция объективизировать фикции и придавать им статус почти реальных понятий.

[17] Это объясняет и тот факт, что некоторые формальные *математические* тексты осмыслены. Смысл в данном случае заключается в окружающем их математическом контексте.

2. Помимо выписанных предположений, очень многие, и зачастую самые критичные для рассматриваемой ситуации, прячутся в общий применяемый аппарат. Эти неявные предположения, как правило, не осознают даже специалисты. Например, когда в XX веке наконец-то занялись вопросом, что же можно измерять действительными числами, выросла целая теория измерений, пользуясь которой можно, в частности, практически всегда отвергнуть предположение, сделанное в соответствующем пункте достоинств.

3. Поскольку термин — монумент понятия, он полностью теряет гибкость и зачастую в конкретной ситуации он начинает означать вовсе не то, что имелось в виду первоначально. Например, способность решать задачи из тестового набора может не иметь никакого отношения к способности гибкого реагирования на изменяющуюся реальную ситуацию.

4. Поскольку строгое доказательство может содержать много шагов и вовлекать многие утверждения, которые, как стыдливо говорят ученые, «выполнены в реальной ситуации лишь приближенно», в ходе такого обоснования соответствие реальности может потеряться, так что строго доказанный результат требует содержательной перепроверки при применениях.

5. Поскольку любая формализация неадекватна во многих отношениях, она может затушевать достаточно легко усматриваемые опасности привлекательно выглядящими следствиями. Например, в модели коллективного поведения и равновесного состояния общества исключается возможность, когда лишь абсолютное меньшинство людей соблюдает законы, которая реализуется, скажем в нынешней России.

6. Поскольку теоретические структуры для тонких моделей сложны, переход к компьютерному моделированию стимулирует применение грубых моделей, которые (в частности в физике) начали подменять собою реальность.[18]

Поскольку негативизм — одна из форм конформизма, а эпатаж — проявление филистерства, модные философские направления *постмодернизм* и *фаллабилизм* не являются лекарствами от недостатков формализации, но зато великолепно излечивают ее достоинства. *Содержательное рассмотрение может порой стать стоп-сигналом на пути неправомерного обобщения успехов конкретной формализации, но альтернативой ей может быть*

[18]Впрочем, для того, чтобы подменить реальность, модель не обязана быть грубой. Но, как ни парадоксально, грубые модели чаще на это претендуют, поскольку их легче понять и для их понимания не обязательно понимать их возможные альтернативы.

лишь другая смелая и нетривиальная формализация. Понимание, что ты делаешь вещь не абсолютную, не должно, особенно в науке и в философии, приводить к принципу замены качественной долговечности бросовой дешевой недолговечностью, или подмены содержания упаковкой и саморекламой. Это беспощадно карается Мировым Законом.

Формализуя, нужно прежде всего уяснить себе *цель*, ради которой производится формализация, поскольку любая формализация ограничена по своему назначению и сфере применения. Далее, нужно установить важные для поставленной цели понятия, объекты и характеристики, присутствующие в формализуемой системе либо ситуации. Далее, необходимо выделить естественные порядок и меру. Все это целесообразно вложить (даже ценой дополнительного огрубления) в какую-либо стандартную математическую структуру. Но недопустимо подгонять модель к заранее выбранной структуре, скажем, к вероятностной модели, что обычно делается в так называемом системном анализе. Особенно осторожно нужно подходить к выражению характеристик числами. Если естественный порядок на характеристиках частичный, то неравенство двух чисел отнюдь не всегда означает предпочтительность одного из решений. Коварны и действия над числами, так, например, средний балл ученика — на самом деле бессмысленная характеристика, поскольку расстояния между оценками 2, 3, 4 и 5 неравномерны, и тем более несравнимы оценки, поставленные разными преподавателями.

Хорошая формализация узнается не столько по критериям успешности (на самом деле слишком часто в современном мире успех оказывается при ближайшем рассмотрении хорошо разрекламированной неудачей), сколько по критериям внутренней гармоничности и красоты и по способности работать не только для тех целей, для которых она создавалась. Ни одна хорошая формализация не была создана для решения слишком широкой задачи, поскольку универсальное решение — плохо продуманное и широко разрекламированное частное.

Ни в коем случае не пытайтесь устранить *все* недостатки, устраняйте лишь те, которые мешают, и лучше всего за счет развития достоинств. Прямо устранив недостатки, обычно устраняют достоинства, а вместо устраненных недостатков возникают другие, еще худшие.

Не стесняйтесь работать над техническими улучшениями, поскольку они слишком часто приносят новое качество. Так, если таблицы истинности работают лишь в классической логике высказываний, то сокращенные таблицы истинности работают в логике предикатов и обобщаются (как семантические (аналитические) таблицы) на неклассические логики. Устраняйте все явные неэффективности, поскольку это приносит тот же эффект, что и техническое совершенствование. А если окажется необходимой сильная оптимизация, обязательно зафиксируйте сначала неоптимизированный вариант, поскольку оптимизированный наверняка придется полностью выбросить при малейшем изменении задачи.

С формализацией неразрывно связана интерпретация ее результатов — *деформализация*, поскольку они должны быть вновь переведены с формального языка на содержательный. Уже древние астрологи составляли таблицы деформализаций типа «Сатурн в Весах при полной Луне — царю надо ждать неприятности с востока.» Здесь не грех следовать их примеру.

Пример 2.3.1. *Рассмотрим, переформулировав ее для современных реалий, классическую петербургскую задачу из теории вероятностей. Пусть некому братку поручено взять откуп с человека. Находясь в исключительно хорошем расположении духа, браток предложил человеку сыграть в следующую игру. Бросается монета. Если выпала решка, то человек выиграл и ничего не платит. Если выпал орел, то монетка бросается еще раз, и так далее, до первой решки. Человек платит в этом случае* 2^n *рублей, где* n *— число выпавших орлов. Сколько в среднем заплатит человек?*

Ответ на данную задачу парадоксальный: бесконечно много. Но каждому очевидно, что на самом деле даже заплатить тысячу рублей при такой игре очень маловероятно. Здесь возникает проблема деформализации. При формализации мы воспользовались абстракцией потенциальной осуществимости, предположив, что у человека может быть сколько угодно денег. Но на самом деле с него невозможно взять больше того, что у него есть. Соответственно, если у него в кармане всего два рубля и нет больше никакого имущества, то средний проигрыш человека — рубль. При каждом удвоении суммы его денег средний проигрыш возрастает еще на полтинник, так что средний проигрыш миллионера — 10 рублей…

Формализованное рассуждение строго следует закону тождества и закону достаточного основания. Понятия в нем превращены в термины, все, что имеет внешнюю форму высказывания, на самом деле является им.[19] Именно по данной причине в современных формализациях сравнительно легко идут на нарушение двух других законов логики — закона противоречия и закона исключенного третьего. Но за любое достижение нужно платить, и поэтому при формализации возникают две критические точки.

[19] В содержательном языке отнюдь не все предложения, имеющие внешнюю форму высказываний, допускают полное уточнение смысла. Поэтому необходимо различать *высказывания* и *квазивысказывания* [29]. Например, «Ваня женат на Мане» — высказывание, а «Ваня любит Маню» — квазивысказывание. Для квазивысказываний могут нарушаться все законы традиционной логики, но, тем не менее, техника преобразования высказываний, разработанная в логике, может быть применена и к ним. Поскольку, скажем, джайны вообще не верят в существование объективных понятий в нашем мире, джайнская логика с самого начала обращается со всеми высказываниями как с квазивысказываниями.

То, что предшествует формализации, и то, что следует за ней, часто бывает даже не высказываниями, а квазивысказываниями. Поэтому при замене понятий формализованными терминами почти всегда нарушается закон тождества, и, более того, как уже было сказано, для успешности формализации нужно эту замену производить смело. Здесь важно содержательно прокомментировать сделанные предположения, но опыт показывает, что именно самые важные огрубления и гипотезы при таких комментариях забываются.

Вернемся к критическим точкам формализации. Формализация немедленно отчуждается от цели, для которой она была использована. Это является положительным моментом, поскольку резко увеличивает вероятность выявления нежелательных последствий и препятствий. Но это требует отдельного этапа деформализации после получения результатов.

Если полученные результаты достаточно сильны и красивы, возникает соблазн использовать их не только для той цели, для которой они создавались. Этот соблазн часто оправдан, поскольку успешная формализация успешна не только там, где она создавалась, но и во многих других местах. Но, поскольку критические предположения при формализации слишком часто остаются невыявленными, здесь практически с необходимостью возникает нарушение закона тождества и закона достаточного основания. Для проверки возможности переноса результатов, как правило, приходится заново просмотреть весь вывод, поскольку многие неявные предположения, сделанные при формализации, дают себя знать именно при получении промежуточных результатов.

И, наконец, помните, что чем дольше Вы пользовались данной формализацией и чем успешнее были результаты, тем больше шансы на то, что Вы примените ее в совершенно неподходящей ситуации, так что при успехе усиливайте самокритику. Далее, соединение двух успешных формализаций чаще всего приводит к химерной системе, соединяющей и умножающей их недостатки и взаимно уничтожающей достоинства. Исключения здесь весьма редки, так что лучше не добавлять новые возможности к успешно работающей системе.

2.4 Рефлективные результаты в математике

Математика и логика первыми из наук вступила на стадию *рефлексии* — оказались способны изучать себя своими собственными средствами. Эту задачу выполняет прежде всего современная *математическая логика*.

Известно, что разница между научной теорией и учением состоит в том, что научная теория открыта для критики и опровержений, не претендует на свою единственную истинность и, соответственно, готова к рассмотрению альтернатив. Учение же не переносит критики, претендует на Истину и излагается таким образом, что создается впечатление, что альтернатив ему нет и быть не может, а если они есть, то это какая-то ересь. Математика так и не стала учением, несмотря на усилия схоластически (в худшем смысле этого слова) настроенных преподавателей, поскольку она все время развивалась и ее передовые части всегда были недостаточно обоснованы.

Когда, наконец-то, в конце XIX века на короткий момент показалось, что фундамент здания математики раз и навсегда завершен, появились парадоксы теории множеств, которые заставили взглянуть критически на все здание математики, и возникла альтернатива традиционной математике — интуиционизм.

Д. Гильбертом была выдвинута программа, состоящая из целей и средств. Последовательная и успешная реализация средств превратила бы математику в учение, но цели ее были вполне почтенны и оказались в некотором смысле достижимы.[20]

Рассмотрим программу Гильберта, воспользовавшись, в частности, анализом, проделанным в книге [9].

1. Некоторые из математических объектов и некоторые из высказываний о них (*реальные*) имеют практически прямую интерпретацию в окружающем мире и могут быть непосредственно применены. Например, такова формула, связывающая длину окружности с радиусом круга: $l = 2\pi r$.

2. Некоторые из реальных объектов и высказываний *финитны*, имеют конечное точное представление и могут быть построены (проверены) за конечное число шагов. Другие реальные высказывания могут быть приближены финитными. Например, формула для длины окружности не является финитной, т. к. используются действительные числа, но для практических целей она может быть приближена, скажем, выражениями $l = \frac{22}{7}r$, $l = 3.14159r$, которые уже могут считаться финитными для рациональных l, r.

3. Подавляющее большинство математических объектов и высказываний являются *идеальными*, которые не имеют прямой интерпретации в реальном мире и *в принципе* должны быть лишь промежуточными шагами на пути получения одних реальных утверждений из других.

4. Необходимо точно обосновать принципиальную устранимость идеальных объектов и идеальных высказываний из доказательств реальных результатов; эта возможность устранения и является оправданием математики.

[20] Да и большинство средств оказались необходимы и рациональны.

5. На практике нецелесообразно устранять идеальные объекты, поскольку при этом выкладки становятся совершенно необозримыми и мощность математических рассуждений резко снижается.

В качестве *средства* для достижения этих целей предлагалось формализовать математику и доказать ее непротиворечивость, не используя идеальных объектов, финитными средствами.

Первое из предложенных Д. Гильбертом средств оказалось жизнеспособным. Ныне математику без полной формализации и мыслить как-то неудобно. Но ситуация оказалась сложнее, чем предполагал Д. Гильберт.

Непротиворечивость влечет устранимость идеальных объектов, лишь если принять два неявных предположения, следующие из работ Гильберта:

1. Всякое реальное утверждение может быть либо доказано, либо опровергнуто средствами формальной теории.

2. Всякое истинное реальное утверждение доказуемо.[21]

Как оказалось, эти два предположения верны, если под реальными утверждениями понимать утверждения о том, что данный алгоритм за данное число шагов дает данный ответ (либо, соответственно, не дает ответа) на заданных исходных данных. Если отбросить хотя бы ограничение количества шагов, то уже появляются недоказуемые и неопровержимые в любой наперед заданной непротиворечивой формальной теории реальные высказывания. Таким образом, при соответствующем уточнении понятия реального высказывания программа Гильберта оказывается полностью корректной.

Еще более гениальным было прозрение Гильберта насчет нецелесообразности устранения идеальных объектов. Первые же результаты о возможности извлечь финитное построение из (хотя бы) арифметического доказательства дали невообразимо громадную оценку увеличения числа шагов построения при устранении идеальных понятий.[22] Так что идеальные объекты дают нам возможность совершать колоссальные прыжки через реальные топи на очередной остров интересных реальных результатов. Примером такого

[21] Заметим, что второе предположение независимо от первого. Возможность либо доказать, либо опровергнуть не означает того, что данное доказательство хоть что-то обосновывает. В противоречивой теории любое утверждение может быть и доказано, и опровергнуто.

[22] В частности, функция, перерабатывающая доказательство в классической (и даже в конструктивной) арифметике формулы вида $\exists x\, A(x)$, где $A(x)$ — алгоритмически проверяемое свойство, в построение такого $\mathbf{n}$, что $A(\mathbf{n})$, является ε_0-рекурсивной, так что никакой реальной оценки числа ее шагов дать просто не удастся. Скажем, функция Аккермана, являющаяся эталоном сверхбыстрого роста и сверхбольшого числа шагов вычислений для компьютерных программ, по сравнению с такими функциями просто вирус по сравнению со слоном.

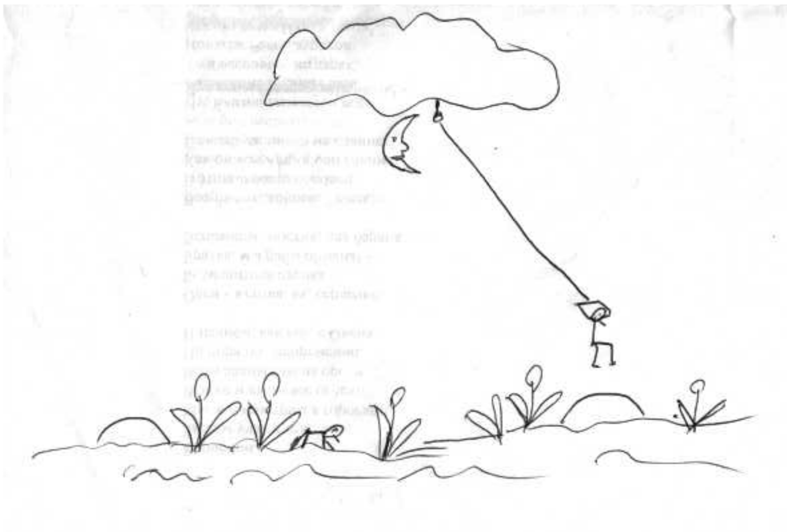


Рис. 2.1: Прыжок через идеальное

прыжка является появившаяся из гибрида результатов теории чисел и теории сложности вычислений теория современных индивидуальных надежных шифров.

Далее, уже после появления теоремы Гёделя о неполноте стало ясно, что, если чуть-чуть расширить класс реальных суждений, а именно, добавить формулы вида

Данное алгоритмически проверяемое свойство выполнено при любых значениях аргументов. (2.10)

или хотя бы

Данная программа при любых значениях аргументов выдает 0. (2.11)

то появляются реальные свойства, независимые не только от арифметики, но и от теорий множеств.

Теорема Гудстейна о неразрешимых арифметических проблемах на самом деле еще интереснее. Английский математик Рамсей в 1926 г. доказал теорему о том, что для любого n найдется такое k, что в любом отношении между k объектами найдутся либо n объектов, все попарно находящиеся в данном отношении, либо n объектов, никакая пара из которых не находится в данном отношении. Но доказательство этой теоремы было совершенно неконструктивным. Конечно же, по самой своей форме данная теорема подходит под разряд реальных утверждений математики и даже из полностью абстрактного ее доказательства извлекается тривиальная, но безнадежно неэффективная программа: перебирать все конечные отношения с данным числом элементов k, пока не опровергнем гипотезу, что k является искомым, после чего увеличить k на 1 и действовать так, покуда для некоторого k все отношения не окажутся удовлетворяющими теореме Рамсея для n.

Впоследствии были получены оценки k для данного n, но они были колоссальными и явно завышенными. Р. Л. Гудстейн показал, что, используя все более сильные аксиомы теории множеств, эти оценки можно бесконечно понижать.[23] Таким образом, чем эффективнее написана программа, тем более идеальные понятия могут понадобиться для ее обоснования.

Итак, программа Гильберта в современной математике в значительной степени *успешно реализована* в отношении своих целей. Но в отношении предложенных средств ее полная реализация привела бы к превращению математики в учение, и поэтому закономерно сорвалась.

Заметим, что каждое из указанных средств само по себе явилось мощным орудием, но, конечно же, поскольку оно имело большие достоинства, оно обладало и большими недостатками. В частности, теорема Гёделя о неполноте означает невозможность полно и окончательно формализовать даже арифметику (что, как мы еще раз подчеркиваем, отнюдь не означает произвольности выбора формализаций или отказа от формализаций вообще). Стоит подчеркнуть абсолютность, широчайшую переносимость и устойчивость теоремы Гёделя о неполноте. Любые попытки обойти ее приводят либо к системам, не являющимся формальными, либо к другой форме неполноты.

Разберем один из примеров. Р. Карнап предложил правило с бесконечным числом посылок:

Если имеется общий метод доказательства $A(\mathbf{n})$ при любом конкретном n из рассматриваемого универса, то выполнено общее утверждение $\forall x\, A(x)$. (2.12)

Для натуральных чисел правило Карнапа символически записывается как

$$\frac{A(\mathbf{0})\;\; A(\mathbf{1})\;\; \ldots A(\mathbf{n})\;\; \ldots}{\forall x\, A(x)}. \tag{2.13}$$

Сам Карнап считал, что очевидна полнота любой теории с данным правилом и выводимость в ней любой истинной на стандартной модели формулы. Но лишь через 35 лет после появления правила Карнапа удалось строго доказать его полноту для арифметики, а для структур более высоких типов вопрос зачастую до сих пор не решен.

Далее, понятие вывода с правилом Карнапа, конечно же, уже не является финитным и алгоритмически проверяемым. Более того, строгое определение

[23] Не поймите, что они становятся сколь угодно низкими! Они просто становятся менее страшными.

такого вывода требует сложнейшей трансфинитной индукции по объектам высших типов.

Если же считать, что общий метод доказательства $A(\mathbf{n})$ — вывод утверждения о ее выводимости в данной формальной теории, то теория опять становится неполной, хотя и значительно сильнее исходной.

Третья теорема Гёделя показывает, что при прямой формализации понятия непротиворечивости непротиворечивость любой корректной теории может быть обоснована лишь средствами, выходящими за ее рамки. Она окончательно провела границу между теорией и учением, показав, что теория может исследовать и критиковать саму себя, но не может сама себя обосновывать, так же как человек может сам отыскивать свои ошибки, но не может сам себя вытащить за волосы из болота.[24] Хотя данная теорема и не столь устойчива, как теорема о неполноте, она доказала свою мощность как рефлексивное орудие сравнения теорий. Если в теории A доказывается естественным образом закодированная непротиворечивость теории B, то B считается более слабой, чем A. В частности, если расширение теории каким-то новым принципом дает возможность доказать непротиворечивость исходной теории, то данное расширение считается весьма существенным.[25]

И, наконец, по поводу идеальных объектов можно добавить следующее соображение.

Аксиома выбора является наиболее яростно критикуемым положением теории множеств, а также одним из тех, для которых ясно осознана их высочайшая степень идеальности. Напомним, что *семейством* называется отображение, сопоставляющее каждому имени из некоторой заранее определенной совокупности имен (или индексов, в традиционной математический терминологии) объект.

Для любого семейства непустых множеств существует функция, выдающая по имени множества его элемент. (2.14)

[24]На самом деле ситуация вокруг теоремы Гёделя о недоказуемости непротиворечивости значительно сложнее и интереснее. При неестественных кодировках понятия непротиворечивости непротиворечивость можно доказать, только вот корректность данных кодировок сама неявно зависит от непротиворечивости данной теории.

[25]Примером применения такого метода явилось исследование аксиом математической индукции в теории множеств NF, предложенной Куайном. В данной теории множества не строятся, исходя из пустого, а просто принимается предположение, что любая формула, в которой можно корректно расставить типы объектов (*стратифицированная*, например, $\exists y(y \in X)$), определяет множество (в приведенном примере — множество всех непустых множеств). Она, неформально говоря, суммирует те корректно типизированные свойства, которые не изменяются при переходе от типа к типу. В теории NF индукция доказывается лишь для стратифицированных свойств, а добавление индукции по произвольным свойствам (теория NFI) приводит к существенному усилению теории NF. А именно, в теории NFI доказывается непротиворечивость NF, пополненной всеми стратифицированными следствиями NFI.

Эта аксиома не дает никакого построения функции, существование которой постулируется. Она дает возможность доказать такие гадкие теоремы, как известный польский пример разбиения шара на четыре непересекающихся множества таким образом, что из них движениями можно составить два шара такого же диаметра (разрезали яблоко на четыре части и сложили из них два таких же яблока). Строго доказано, что многие из объектов, «построенных» при помощи аксиомы выбора, не могут быть построены никаким явным способом даже в теории множеств.

Но аксиома выбора эквивалентна, как выяснили исследования последних лет, первой теореме Гёделя — о полноте классической логики. Полнота классической логики — настолько важный позитивный результат на фоне многочисленных негативных, что он один достаточен для оправдания аксиомы выбора. Так что если хотите получить красивую и законченную теорию, смиряйтесь и с ее нежелательными следствиями.

2.5 Влияние рефлективных результатов на научное мировоззрение

Как известно, успех является тяжким испытанием для научной теории. Как правило, в момент, когда она становится популярной, ее результаты настолько вульгаризируются и извращаются толкователями, что потом долго приходится разгребать авгиевы конюшни и восстанавливать, что же было сделано на самом деле.

В предыдущем параграфе было показано, что рефлективные результаты не допускают однозначного толкования в духе агностицизма либо примитивного материализма. Но возникает соблазн тем не менее истолковать их, например, так:

> Раз абсолютной истины нет, то все ложно.[26]

Это толкование оказалось тем более актуально, что нарастало раздражение по поводу воинствующего рационализма и материализма, безапелляци-

[26] Именно так однажды заявили на капустнике студентки, которым я рассказывал теорему Гёделя. Ну что же, многим хочется иметь четко определенный ответ — да или нет — на любой вопрос. С этим квазиклассическим огрублением действительности связано еще одно недоразумение, все время возникающее в популярных изложениях теоремы Гёделя о неполноте. Ниоткуда не следует, что любое утверждение либо доказуемо, либо опровержимо, либо неразрешимо (в смысле доказуемости неразрешимости.) Более того, легко построить пример арифметического утверждения, для которого неразрешимо, является ли оно неразрешимым, неразрешимо, разрешимо ли, что оно является неразрешимым, и так далее, до бесконечности (см., напр., брошюру К. М. Подниекса [37]). Степеней незнания и невежества всегда гораздо больше, чем степеней знания.

онно утверждавшего то, что считалось в тот момент научной истиной, и все более демонстрировавшего свою беспомощность в духовных вопросах.[27]

2.6 Трудности и опасности при применении математических моделей

Первая трудность применения математических моделей — это их абстрактность и общность. Не говоря уже об этапе деформализации, объективно трудно порою применение идеальной математической конструкции к более реальному частному случаю.

Пример 2.6.1. *Теорема, обратная к теореме Пифагора, гласит, что, если сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей, то треугольник прямоугольный. Отсюда вытекает практическое следствие. Если связать веревку в кольцо, разделить ее на 12 равных частей и затем натянуть между колышками* A, B, C *таким образом, что расстояние* AB *равно трем делениям, а* AC *— четырем, то угол* BAC *будет прямым.*

Как известно, такой метод построения прямого угла применялся еще строителями древнего Египта. Но для не умеющего рационально рассуждать человека он выглядит неким шаманством и тайной, что и объясняет, в частности, откуда пошли тайны каменщиков (масонские тайны на современном языке).

Еще одной, сильно недооцениваемой самими математиками, проблемой при общении математиков с другими специалистами является привычка математиков превращать в термины самые невинные и общераспространенные слова, причем в основном имеющие положительную эмоциональную окраску.

Пример 2.6.2. *Автор как-то своими ушами слышал следующий обрывок диалога. В ответ на замечание математика, выполнявшего заказ некоей фирмы:*

—Распределение ошибок считается нормальным,—
заказчик заявил:

— Конечно. Оно у нас ненормальное, что ли?

Математик, который вел разговор, даже не обратил внимания на высказывание заказчика, поскольку, как тетерев, токовал над своими формулами.

[27] В вопросах духа, этики и морали рационализм *в принципе* не может продвинуться дальше Спинозы [44], поскольку в данных вопросах нет критериев истины, а, значит, и суждений в традиционном смысле, и все правила традиционной логики могут нарушаться.

В данном случае *даже наименование по авторам лучше, поскольку оно эмоционально нейтрально* и не связано ни с какими обыденными понятиями.

Один из крупнейших современных математиков В. А. Арнольд подчеркивал в своей лекции для сотрудников аппарата президента России, что жесткие математические модели, дающие однозначный результат, практически всегда вводят в заблуждение.

Причин этого несколько. Некоторые из них носят чисто математический характер, другие относятся скорее к методологическим.

Первая методологическая причина в том, что все забывают, что успешная математическая модель является скорее карикатурой на действительность, чем ее фотографией. А карикатура подчеркивает и выделяет отдельные черты за счет, может быть, резкого искажения других. Конечно, хорошая карикатура на человека выделяет его скрытые особенности, точно так же и хорошая математическая теория выявляет скрытые ранее свойства рассматриваемой области. Попытка же построить фотографию приводит к неудачам, поскольку она базируется на методологическом мифе приближения к Истине.

Вторая методологическая причина в том, что резко переоценивается конструктивная мощь математических методов и недооценивается их деструктивная сила. Поэтому в математической модели ищут новые конструкции, и хватаются за самые простые и самые красивые *с математической точки зрения* решения. При этом не обращается должного внимания на выявившиеся недостатки.

Пример 2.6.3. *Рассмотрим работы академика А. Т. Фоменко и его школы (в частности, [33, 15, 7]) по глобальной хронологии. Используемые математические модели удовлетворяют требованию карикатурности, и поэтому возражения гуманитариев и гуманитарно инспирированных естественников бьют мимо цели. В самом деле, то, что звездный каталог Альмагеста Птолемея не мог быть составлен в результате наблюдений, проводившихся в то время, когда по традиционной хронологии жил Птолемей, неоднократно замечали многие авторы. То, что историю бесстыднейшим образом переписывают, уж не русским-то объяснять.*[28]

Простейший системный и логический анализ трудов по традиционной хронологии показывает, что косвенность измерений дат древней истории достигает 4–5 звеньев, причем многие из них абсолютно ненадежны.[29] *На-*

[28]Да что говорить о России! В Египте вычеркнули из истории, яко не бывших, Эхнатона и Тутанхамона, во Вьетнаме тоже вычеркнули пару императоров, дабы задним числом возвести в императорское достоинство отца и деда основателя новой династии. Но вот когда говорят о том, что и европейская история могла быть переписанной, поднимается вой. А *так и должно было быть*, пока не началась жесточайшая перекрестная перепроверка ехидными, абсолютно независимыми и прекрасно осведомленными о состоянии дел соседями.

[29]Логически точно такая же ситуация в астрономии с измерением расстояний до дальних

пример, списки римских консулов — документ, весьма неустойчивый по отношению к ошибкам. Как заметил Апулей в своей «Апологии», даже современники при определении давности события путались, считая консулов. Да и имена консулов часто были похожи друг на друга, а то и повторялись. Или вспомним различных Каллиев и Каллидов в афинских списках архонтов, которых тривиально спутать даже в результате описки. Какая-то надежность появляется, лишь если идет взаимная перепроверка нескольких историй, например, израильской и иудейской или вавилонской и ассирийской. Но результаты взаимопроверки Израиля и Иудеи дошли лишь в одном из вариантов, так что в Книгах Царств Библии уже в XVII веке были найдены несогласованности. Результат взаимопроверки Вавилона и Ассирии дошел вообще лишь в одном экземпляре, правда, в виде текста договора, согласованного обоими сторонами. Но даже здесь два соседа не обеспечивают абсолютной надежности.

Далее, зная полупифагорейскую психологию ученых старого времени, можно не сомневаться, что отношение к правителю сказывалось не только на выборе одного из многочисленных вариантов его титулов-прозвищ (чего стоит хотя бы византийский Константин Копроним (Константин Дерьмославный)), но и в подтасовке периодов правления: хороший царь должен был править счастливое число лет, а злодей — зловещее.

И, наконец, все мы знаем тенденцию экспертов принимать во внимание лишь то, что льет воду на их любимую мельницу и браковать все остальное. Эта тенденция проявилась и в самой школе Фоменко в виде грубо идеологически ангажированных реконструкций истории со старообрядческой [33] либо с сайентологической [7] позиций (противоречащих друг другу). Здесь сработала переоценка конструктивных возможностей математики.

Словом, данный предмет требует отдельного обстоятельного и абсолютно незаинтересованного исследования, а еще лучше нескольких перекрестных перепроверок, ничего не принимающих на веру и пользующихся многоуровневым критическим мышлением.

Показательна здесь книга А. А. Бушкова [6]. Гуманитарий четко выявил сильнейшие стороны критики Фоменко и остановился на них. Так что естественнонаучные методы нужно перепроверять гуманитарными и наоборот.

Ну вот, и автор кончил благотривиальностями, — скажет читатель. Но заказное подтверждение не является перепроверкой. Подтверждение

галактик, но астрономы понимают ее и оценивают точность измерений в $\pm 50\%$. Такова же точность и датировок древней истории, а уж об Египте, династии Шан в Китае или Месопотамии и говорить не приходится. Это означает, что даты, традиционно относимые к началу христианской эры, вполне могут датироваться с ошибкой ± 300 лет, так что история отнюдь не обязательно растянута, она может быть и несколько сжатой.

является скорее дьявольским даром заказчику, поскольку убаюкивает его сладкими шаманскими заклинаниями. Экспертов, говорящих неприятные вещи, не любят и не слушают[30]*, почему и делают лишние ошибки и упорствуют в однажды сделанных. Так что результат настоящей перепроверки тот, по поводу которого противная сторона скрежещет зубами и обвиняет в крайней некомпетентности в проверяемой области. Еще лучше, если объединяются против перепроверяющего ранее, казалось бы, непримиримые соперники. Но сами видите, насколько непредвзятость опасна. Тех, кто был ‘Двух партий не боец’*[31]*, всегда казнили первыми.*

Первая математическая причина неадекватности математических моделей состоит в том, что, как правило, игнорируются ошибки в данных и полученное решение не анализируется на устойчивость. А часто малые нарушения приводят к полному изменению качественной картины.

Вторая математическая причина состоит в недооценке конструктивной и деструктивной роли целенаправленно действующих личностей. Даже устойчивая система может быть расшатана планомерными резонансными воздействиями. Дж. Сорос доказал это, заставив Англию девальвировать фунт. А уж что он в свое время проделал с рублем, все знают.[32] Таким образом, даже устойчивости недостаточно, если система не саморегулирующаяся либо воздействия отдельных личностей на нее не являются пренебрежимо малыми.

Можно назвать еще множество методологических и математических причин, но и этого достаточно, чтобы установить следующий вывод:

> Если модель уж больно хороша, она нуждается в перепроверке альтернативным методами.

2.7 Математика и рационализм

Хотя, как уже было сказано, сама по себе математика как профессия отнюдь не способствует материалистическому взгляду на мир, она обычно использовалась адептами квазирелигии прогресса для обоснования своих взглядов.

[30]Как сказал блестящий в своих высших проявлениях и жалкий в низших философ Фридрих Ницше: «**Мир навыворот**. Мы критикуем мыслителя сильнее, когда он устанавливает неприятное нам положение; однако было бы разумнее делать это, когда его положение нам приятно.» [32]

[31]А. К. Толстой

[32]Но 17 августа 1998 г. кремлевское правительство Ельцина и семейства, называвшее себя российским, блестяще доказало, что по деструктивной силе оно превзошло Сороса.

А через два года после дефолта студентка-дипломница четко показала, насколько может ошибаться современник в оценке временных интервалов. Она заявила: «Пять лет назад, во время дефолта…»

Причиной этого парадокса является то, что любое мировоззрение, за исключением крайнего скептицизма, стремится найти Мировой Закон, на который оно опирается. Поскольку в глазах многих математиков и абсолютного большинства естествоиспытателей математические истины являются незыблемыми, они вполне могут сойти за такой закон.

Далее, (хоть и с громадной натяжкой) можно считать математику плодом систематизации эмпирических фактов, причислив ее, таким образом, к разряду естественных наук, если не по предмету, то хотя бы по методу. И, наконец, математический язык современной физики практически не вызывает сомнений у естествоиспытателей в том, что «Природа говорит на языке математики».

Таким образом, вполне почтенный идол найден, тем более, что при некотором умении можно односторонне истолкованными математическими моделями обосновать многие желательные выводы. Примером подобных обоснований является современная синергетика, сконцентрировавшаяся на процессах получения порядка из хаоса, забыв при этом, что математический случайный процесс, тем более с сильными гипотезами о его поведении (например, что он есть белый шум либо распределен нормально) — уже порядок высших уровней, а отнюдь не хаос.

Как показали исследования по теории физических структур (см., в частности, [9]), в некотором смысле вся нынешняя физика выводится из предположения о том, что величины можно измерять действительными числами. Конечно, для этого приходится приложить достижения таких математических теорий, как теория измерений и алгебра. Таким образом, высказывание И. Канта о том, что «Разум предписывает законы Природе» является еще более глубоким, чем принято считать. Рациональный Разум начинает изучать в точности ту часть Природы, которую он может выразить в своих терминах.

В этом смысле получает другую, многоуровневую, интерпретацию и утверждение Канта об априорности математических истин. Математические структуры (а не истины) априорны по отношению к *рационалистическому европейскому мышлению*. Действительно, в каждой отрасли знания ровно столько рационалистической европейской науки, сколько в ней математики.

***

Столь же «почтенную» традицию имеют попытки использовать математику для обоснования мистицизма и иррационализма. Они восходят еще к Пифагору (Бог есть число). Затем открытие первых необычных свойств бесконечных классов было использовано Николаем Кузанским для обоснования триединства Бога.[33] Дж. Беркли использовал для обоснования существова-

[33]Пожалуй, данное обоснование — одно из немногих мест, где математика действитель-

ния Бога анализ бесконечно малых (поскольку в тот момент действия над бесконечно малыми не могли быть обоснованы рационально).

Пожалуй, логическую сторону подобных обоснований лучше всего продемонстрировал Леонард Эйлер в известном анекдоте.

> Дидро, посетив Россию по приглашению Екатерины Великой, изрядно поднадоел ей постоянными проповедями атеизма. Тогда Екатерина попросила кого-либо из академиков публично переспорить Дидро. Вызвался Эйлер. Он, внимательно выслушав очередную проповедь, заявил:
>
> — $e^{i\pi} = -1$. Значит, Бог существует.[34]
>
> Невежественный в математике Дидро только раскрыл рот.

***

Математика сама по себе абсолютно нейтральна по отношению к рационализму и мистицизму. Она не может ни подтвердить, ни поставить под сомнение ни одно из этих течений.

Тем не менее в математике действительно есть громадные резервы и рационального мышления, и возможностей построения альтернатив тому, что непререкаемо считается Единственно Возможным Рациональным Мышлением, превратив, таким образом, системный подход в настоящую науку и предотвратив его тенденции превратиться в учение.

Все вышеизложенное означает, что математике нужно реализовать заложенные в ней богатейшие иррационалистические возможности высшего порядка, поскольку иначе освободившееся место займет примитивный иррационализм типа суеверий и постмодернизма. Есть ли в современной математике возможности для этого?

но была полезна при рассуждениях о Боге. Примитивно мыслящие люди, претендующие на рациональность, до сих пор усматривают в триединстве логическое противоречие. Совсем недавно философ заявил студентам-первокурсникам, только что изучавшим элементы нестандартного анализа: «Логически невозможно, чтобы бесконечное было частью конечного». Затем он долго обижался, что над ним смеялись.

[34] Еще более ярко логику подобных обоснований раскрыл Ф. Соллогуб в знаменитом диалоге из его «Мелкого беса»:

— Хочешь, я докажу тебе, как дважды два — четыре, что ты должен жениться на моей сестре?

— Ну, докажи!

— Дважды два — четыре. Верно?

— Верно.

— Значит, ты должен жениться на моей сестре!

2.8 Интуиционизм как альтернатива стандартному рационализму

Интуиционизм возникал как вызывающая альтернатива рационализму, основанному на классической математике. Поэтому с самого начала интуиционистами подчеркивалась неформализуемость математики и даже логики, что не исключало нахождения формализаций вновь предложенных концепций.

Хотя основатели интуиционизма ссылались на интуитивистскую философию для обоснования своей позиции, они на самом деле очень мало зависели от данной философии. Более того, на деле они зачастую противоречили ей. Основополагающие их положения на самом деле были весьма рационалистичны, и противоречили лишь той форме рационализма, которая претендовала (и доныне претендует) на монополию.

Прежде всего, отметались претензии математики (и науки вообще) на нахождение Истины и даже бесконечные приближения к ней. На место Истины ставились не эмпирические конвенции, а интуитивная убедительность, поскольку рационально *по форме* выразить критерии, которыми пользовались основатели интуиционизма, в тот момент еще не было средств. Но характеристический признак примитивного иррационализма и антисциентизма — отрицание успехов науки и подмена их болтовней — полностью отсутствовал. Ставилась весьма тяжелая и неблагодарная задача перестройки накопленного багажа математики с новых позиций, пересмотра ее конструкций при сохранении всего, что возможно. Так что если по форме можно было принять высказывания основателя интуиционизма Брауэра за большевизм в науке, то по сути они были скорее достаточно радикальным реформизмом.

Все предложенные Брауэром новации были наиболее радикальными из тех, которые допустимы для сохранения здания математики. В частности, он не вводил новых истинностных значений, а просто привлек внимание к факту, который математики предпочитали игнорировать в теории, но интенсивно использовать на практике: среди точно сформулированных математических утверждений есть множество таких, для которых не видно никакого способа ни доказать их, ни опровергнуть. Брауэр не отрицал возможности того, что некоторые из них могут оказаться вообще неразрешимыми, но не делал упора и на данной возможности. Достаточно того, что он был полностью убежден в отсутствии *единого метода* решить любую математическую проблему.

2.8.1 Творческие последовательности

Становящийся, развивающийся характер математических понятий был отражен Брауэром в концепции творческой последовательности, зависящей не от содержания проблемы, а от процесса ее решения. *Творческая последовательность.*

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0, \text{ если в году } n \text{ не доказана формула } A, \\ 1, \text{ если она доказана.} \end{cases}$$

Заметим аналогию между творческими последовательностями и моделями Крипке интуиционистской логики. В моделях Крипке формула может некоторое время оставаться неразрешенной, а затем при движении вверх по дереву возможных миров стать истинной. Если же она никогда не станет истинной, она по определению считается ложной. Поэтому принцип, формально выражающий наличие творческих последовательностей, носит называние схемы Крипке:

$$\forall x\,\exists\alpha(A(x) \Leftrightarrow \exists n\,\alpha(n) = 1) \tag{2.15}$$

Беззаконные последовательности. Вводится новый тип последовательностей, обладающий следующим свойством:

$$\forall\alpha(A(\alpha) \Rightarrow \exists n\,\forall\beta(\forall m(m < n \Rightarrow \alpha(m) = \beta(m)) \Rightarrow A(\beta))),$$

т. е. все, что мы о них знаем, мы знаем из уже полученной информации. Трулстра (Голландия, 1968) доказал, что композиции алгоритмов и беззаконных последовательностей образуют модель интуиционизма, в которой можно промоделировать творческие последовательности. Беззаконные и творческие последовательности явились первым примером позитивного использования незнания в точных науках. Возможность сформулировать незнание в виде логической формулы — пожалуй, главное методологическое достижение интуиционизма.

Глава 3

Уровни знаний и умений

3.1 Данные, умения и знания

Приложения в действительно сложных ситуациях либо к действительно сложным системам — то место, где без устойчивого и глубокого мировоззрения не обойтись. Здесь нужны *знания* и *умения* высокого уровня. Поэтому сначала разберемся с данными понятиями.

Тремя базовыми элементами как практической, так и теоретической рациональной деятельности являются

— **Данные**, которые должны прежде всего *храниться*, а затем, в порядке убывания приоритетов для непосредственной применимости, успешно находиться при нужде, проверяться, поддерживаться в порядке и обновляться при необходимости. Таким образом, они хранятся неизменными, пока не будут явно обновлены, и поэтому уделяют внимание прежде всего их сохранению и поддержанию их адекватности меняющемуся состоянию дел и целостности при необходимых изменениях.

— **Знания** должны прежде всего *преобразовываться*. Далее, их нужно хранить, как и данные, они должны быть доступными, они должны конкретизироваться применительно к данной ситуации и обобщаться для целого класса применений. Они, конечно же, должны при необходимости пересматриваться. И, наконец, они должны переводиться с одного языка на другой.[1]

[1] Под языками здесь понимаются прежде всего специализированные жаргоны и формальные языки. Но даже проблема перевода с одного естественного языка на другой может оказаться тяжелой. Все знают, как мучаются хорошие переводчики стихов. А. Швейцер, великий гуманист XX века, так и не смог перевести свою книгу о Христе с французского на немецкий и в конце концов переписал ее заново. То же сделал и А. Набоков со своей «Лолитой». Инте-

— **Умения** прежде всего *применяются*. Помимо этого, они преобразуются для обеспечения гибкости или приспособления к изменившимся условиям. Далее, они обобщаются и пересматриваются.

При каждом применении и при каждом пересмотре существующего знания его конкретные формы видоизменяются. Самым часто применяемым преобразованием знания является его *конкретизация*. Например, применением теоремы, обратной к теореме Пифагора, является возможность построения прямого угла с помощью веревки, разделенной на 12 частей. Принцип бесконечного спуска является одной из конкретизаций возвратной индукции. Все многочисленные понятия гомоморфизма в алгебре являются конкретизациями общего понятия морфизмов алгебраических систем.

Факты могут быть включены в базу имеющихся знаний, лишь если они организованы при помощи суждений более высокого уровня.[2]

Таким образом, главной характеристикой знания является его *гибкость*, возможность выражать одно и то же в различных формах. Именно это позволяет исключительно широко применять настоящие знания, но порою затрудняет понимание обычными людьми того, что говорят действительно знающие специалисты, поскольку они не могут вообразить себе, что столь различные высказывания эксперта являются всего-навсего различными выражениями одной и той же идеи.[3] Более того, творческие и знающие люди обычно даже *не могут думать на внешнем 'естественном' языке*. Они вынуждены переводить внутренние структуры в выражения общепринятого языка, чтобы результаты рассуждений могли понять другие.

Интересны случаи, когда одни структуры выступают под видом других.

Самый распространенный случай — *данные, имеющие внешнюю форму знаний*. Такую структуру ума назовем *эрудицией*. Эрудиция делает упор

ресны здесь комментарии Швейцера. Он сказал: «Французский язык больше подходит для выражения общих идей, а немецкий — для частностей и подробностей». Если столь различаются сферы, в которых эффективно применимы естественные языки, то что же говорить об искусственных и полуискусственных!

Здесь частенько требуется перевод даже для двух специалистов, формально говорящих на одном и том же языке, но пользующихся различными *парадигмами* (см. ниже).

[2]Здесь порою на первых порах достаточно непосредственных эмпирических обобщений типа:

> *«Все могильники, раскопанные экспедицией Корепанова в Кезском районе, не содержат золотых вещей.»*

Но очень скоро потребуется сделать выводы из таких наблюдений, иначе они не укладываются в систему, и тем самым перейти к действительно теоретическим суждениям высокого уровня.

[3]Конечно, эти формулировки делают упор на различных ее аспектах.

на *выражениях и текстах*, тогда как знание подчеркивает *идеи и контексты*. Эрудиция идеально соединяет слабейшие стороны двух форм мышления, столь же эффективно взаимоуничтожая их сильнейшие стороны. Негибкость данных сочетается у эрудированного человека с трудностями применений и зачастую с туманными формами выражения, присущими на определенном этапе развития знанию. Единственным преимуществом эрудиции является повышение престижа человека при неглубоком общении с ним, поскольку он создает впечатление весьма знающей личности.

Если мы встречаем *знания, выраженные как умения*, то перед нами — *высшие формы теоретического знания*. Этого уровня трудно достичь даже внутри одной, сравнительно независимой от остальных, области теории либо практики. Но, поскольку большинство областей мысли и деятельности открыты, добраться до таких высот становится еще труднее. Такой уровень заслуживает названия Теоретического Метода. Теоретический Метод успешно применяется его носителем в, казалось бы, совершенно несвязанных между собою областях. Системные аналитики очень нуждаются в таких методах, но нынешние формы обучения не ориентированы на их передачу,[4] поэтому они до сих пор передаются в основном от учителя к ученику, неформально. Но даже такая передача методов трудна и ненадежна, поэтому они часто теряются при смене поколений. Только тот, кто достиг данного уровня хотя бы в одной области, достоин называться Ученым.

Теоретический метод может быть сделан и передаваемым, но, как правило, для этого необходимо изменение *парадигмы*[5] соответствующей науки.

---

[4]Главная причина этого изложена чуть ниже.

[5]*Парадигма* — термин, введенный У. Куном в книге [24]. Мы ее понимаем несколько более системно, чем обычно принято. Парадигма науки состоит как из формальных критериев приемлемости научного результата, полуформальных критериев и обычаев, характеризующих язык данной науки, так и из неформальных правил интерпретации результатов, связывающих выражения жаргона соответствующей науки с остальным миром. Например, характерным признаком перехода от парадигмы классической физики к парадигме физики первой половины XX века явилось исчезновение термина ‘эфир’. Соответствующее понятие было быстро восстановлено под другим именем (пространство-время, физический вакуум), но, самое главное, изменились критерии интерпретации экспериментов и истолкование фактов. Вместо поиска Единой структуры Единой Вселенной стал вестись поиск вариантов описания разных миров. Вместо требования, чтобы инструменты измерения не влияли на результат, появилось требование учета этого влияния, как неустранимого. Внешней формой научной революции, наиболее легко воспринятой философами, стало отрицание некоторых положений Ньютона (скажем, закона сложения скоростей либо детерминированности реакции тела на воздействие). Но и данное отрицание явилось не гуманитарным, когда одна альтернатива скоропалительно отвергается как ныне не модная в пользу другой, ничем не лучшей, а естественнонаучным, когда были наконец-то установлены явные условия применимости моделей, ранее считавшихся универсальными.

Отрицание некоторых утверждений не обязательно сопутствует научной революции. В

Примером такого перевода теоретического метода в форму регулярного знания является создание анализа бесконечно малых Ньютоном и Лейбницем. Метод бесконечно малых знал уже Архимед, но передаваемым данный метод сделался лишь после резкого изменения парадигмы математики.

Если *умения выражены в форме знаний*, то у нас Практический Метод. Он намного шире по приложениям, но зато еще труднее для передачи, чем Теоретический Метод. Этому высшему уровню ремесла[6] можно научиться лишь при непосредственной передаче от учителя к ученику, но не по его изложениям. Человек, владеющий таким методом, комбинирует известные вещи в совершенно новых сочетаниях, приспосабливает их к самым разным условиям и находит решения в, казалось бы, безвыходных практических ситуациях. Он заслуживает имени Эксперта. Но все эти решения ориентированы на ближайшие применения.[7]

Умения, принявшие форму данных — это типичная техническая инструкция. Гибкость здесь приближается к нулю, зато можно чисто формально проверить при возникновении нештатной ситуации, не была ли нарушена инструкция. Истинную роль таких инструкций, которые полезны лишь для ‘профессионалов’ самого низкого уровня, демонстрирует форма забастовки, известная как работа строго по правилам. Таким образом, инструкция, формально снимая ответственность с человека, делает его простым исполнителем и запрещает ему прежде всего хорошо работать.[8]

Данные, принявшие форму умений — уставы либо обучение типа дрессировки.

Знания, принявшие форму данных — типичный учебник традиционного типа. Поскольку основные оперативные характеристики знаний теряются при данном представлении, такая фиксация знаний создает предпосылки для их фактической потери и перехода в эрудицию. В этом случае теория превращается в учение, а текст — в каноническую книгу.

Традиции составления учебников являются одной из главных причин потери знаний. Но есть и другая, еще более фундаментальная, причина. Все изложение современной науки основано на аристотелевой логике. Аристо-

---

математике, в частности, изменяется прежде всего их содержательная интерпретация.

[6]Здесь под Ремеслом понимается практическая деятельность, направленная не на тиражирование готовых решений, а на производство индивидуальных высококачественных изделий, так что этот термин весьма уважительный.

[7]Что отнюдь не исключает возможности появления совершенно новых классов изделий, но, как правило, здесь нужно сочетание двух решений высокого уровня: либо один Ремесленник создает новое изделие, а второй находит новое его применение, либо соединяются Ремесленник и Ученый. Эти два человека зачастую даже не знают друг друга лично.

[8]Данные замечания не означают, что инструкции не нужны. Мы все не являемся высокоуровневыми профессионалами во всех областях. Но для настоящих профессионалов важнее был бы кодекс чести…

телева (*классическая*) логика является адекватным инструментом изложения *дескриптивных* знаний, то есть знаний самих по себе, применяемых лишь к другим знаниям и описывающим *состояние дел*. Но она обязательно приводит к отрицательным последствиям, если мы интересуемся получением умений из знаний. Эта операция называется *конструктивизацией* знания.

Рассмотренные только что комбинации знаний и умений показывают одну из старейших форм системного анализа — *морфологический ящик*. Схема проделанного анализа представлена на фигуре 3.1.

Что/как	Знания	Умения	Данные
Знания	Наука	Теоретический Метод	Учебник
Умения	Метод	Ремесло	Инструкция
Данные	Эрудиция	Устав	Музей

Рис. 3.1:

Таким образом, морфологический ящик состоит в том, что систематически выписываются всевозможные комбинации нескольких фундаментальных понятий либо блоков, и исследуются прежде всего те из них, которые оказались упущенными либо недооцененными в ходе стихийного развития.

Замечания.

1. Зачастую понятия знаний, умений и данных путают даже там, где это, казалось бы, нужно уяснить с самого начала. В частности, в программных системах грань между «*данными*» и «*знаниями*» обычно проводится по уровню логической сложности их представления. Например, факт $P(c_1, \ldots, c_n)$, где P — отношение, а c_i — конкретные предметы, считается данным, а формула

$$\forall x_1, \ldots, x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (3.1)$$

   это уже знание. Какая-то доля здравого смысла в этом есть, но очень маленькая, как будет видно дальше.

2. Даже сам термин «*знание*» (особенно в контексте «*базы знаний*») является порою результатом чего-то, граничащего с недоразумением. А именно, как впервые заметил С. В. Покровский, в русскоязычной литературе «*знание*» зачастую является калькой английского слова «*knowledge*», которое играет роль ложного друга переводчика, поскольку имеет обертон «*умение*». А в русском языке знания и умения четко различаются.

Упражнения к §3.1

3.1.1. Чем является информация о больных в медицинской информационной системе?

3.1.2. А чем должна быть информация о методах диагностики?

3.1.3. Мы проигнорировали еще одно понятие, относящееся к тезаурусу знаний и умений: *навыки*. Проанализируйте его сами и поймите. почему оно не вошло в основную классификацию.

3.2 Белосельский-Белозерский и Кант

В XVIII веке забытый русский мыслитель князь Белосельский-Белозерский опубликовал книгу [3], получившую прекрасный отзыв И. Канта [17, 18]. Здесь концепция «Дианиологии» разрабатывается с современной точки зрения, поскольку она стала весьма актуальной в связи с многочисленными извращениями, вызванными некритическим использованием одноуровневого критического мышления и квазирелигией прогресса. Поскольку черновик отзыва Канта раскрывает идеи книги, и при этом весьма краток, приведем его полностью.

КАНТ – БЕЛОСЕЛЬСКОМУ (набросок)

Лето 1792.

Ваша замечательная «Дианиология» — драгоценный подарок, который Вашему сиятельству угодно было преподнести мне прошлым летом,— благополучно попала в мои руки. Два экземпляра книги я передал лицам, способным оценить ее достоинства. За истекшее время моя признательная благодарность не изгладилась, но засвидетельствовать ее Вашему сиятельству я откладывал по разным причинам со дня на день; кроме того, мне хотелось кое-что сообщить о том поучительном уроке, который я извлек для себя, чего я коснусь здесь лишь в самых общих чертах.

Последние годы мои усилия направлены к тому, чтобы ограничить спекулятивное знание человека лишь сферой чувственно воспринимаемых предметов; если же спекулятивный разум пытается выйти за пределы этой сферы, то он попадает в espaces imaginaries, как это обозначено на вашей схеме, в которых нет для него ни дна, ни берега, т. е. вообще невозможно никакое познание.

Вашему сиятельству было суждено разработать то, над чем я трудился в течение ряда лет — метафизическое определение границ познавательных способностей человека, человеческого разума в его чистой спекуляции,— но только с иной, а именно с антропологической стороны, которая приучает различать границы предназначенной для каждого индивида сферы посредством разделения, которая основывается на прочных принципах и столь же нова и глубокомысленна, как и прекрасна и понятна.

Это глубокомысленное, никем надлежащим образом еще не понятое, еще менее столь хорошо изложенное наблюдение, что каждому человеку для применения его рассудка дана природой определенная сфера, в которой он может развивать себя, и что таковых сфер четыре, и никто не может выйти за пределы своей без того, чтобы не очутиться в промежутках,[9] которые, как и соседние сферы, названы весьма удачно (если не считать сферу, общую для человека и животных,— сферу инстинкта).

Если позволено будет из всеобщей способности рассудка (l'intelligence universelle) выделить рассудок в специальном значении (l'entendement), способность суждения и разум, и эти три вместе силой воображения, составляющей гений...

Сначала различить в способности представления простую фиксацию представлений, apprehensio bruta без сознания (присуще только скоту) и сферу апперцепции, т. е. понятий, которая составляет сферу рассудка в целом. Последняя представляет собой сферу 1) ума, понимания, т. е. представления с помощью общих понятий in abstracto; 2) оценки, представления особенного как содержащегося во всеобщем, подведения под правила способности суждения in concreto; 3) усмотрения, perspicere, выведения особенного из всеобщего, т. е. сфера разума. Над ней сфера подражания либо самой природе по аналогичным законам, либо оригинальной трансцендентности идеалов. Последняя есть сфера либо трансцедентального воображения, т.е. идеалов способности воображения, гения, духа — esprit, которые составляют, если формы воображения противоречат природе, сферу фантомов, чудовищной фантазии или сферу трансцендентного разума, т. е. идеалов разума, которые суть пустые понятия, если они — лишь распространение спекуляции за пределы того, что не может принадлежать природе. Сфера экзальтации (qui cum ratione insanuit), и вернуть туда рассудок, где была тупость,— значит, ничего не понять из его идеи.

Из Вашей превосходной схемы я извлекаю для себя следующие выводы. Рассудок (l'entendement) в широком значении есть, что обычно называют высшей познавательной способностью и противопоставляют чувственности. Это способность размышлять, в то время как последняя представляет собой способность бездумно созерцать или ощущать. Вы удачно назвали эту сферу сферой тупости, если посмотреть на нее с точки зрения рассудка. Последний включает в себя рассудок в узком значении, способ-

[9] И до сих пор это еще не понято и не изложено, видимо, потому, что противоречит масонско-иллюминатской концепции прогресса и непрерывности знания.

ность суждения и разум. Первый представляет собой способность понимать (intelligence), вторая — способность оценивать (jugement). Третий — способность усматривать (perspicacite) разума. Вследствие небрежности человек может иногда низвергаться из сферы рассудка в пустоту тупости или вследствие перенапряжения — в сферу пустого умничанья, espace imaginaire. Отсюда возникает деление на пять сфер, из которых собственно рассудку (l'entendement) достаются только три. Вы по праву объединили в одну сферу рассудок, l'intelligence, и способность суждения, потому что способность суждения есть не что иное, как способность применить свой рассудок in concreto, способность суждения не создает нового познания, но лишь показывает, как применять имеющееся. Название bon sens, действительно, соответствует способности суждения. Можно сказать: с помощью рассудка мы учимся (т.е. схватываем правила), с помощью способности суждения мы используем знания (применяем правила in concreto), с помощью разума изобретаем, создаем принципы для правил. Отсюда, если первые две способности под названием bon sens (где, собственно, объединены intelligence и jugement) составляют первую сферу собственно рассудка, то сферу разума, способности усматривать, составляет по праву вторую. Но тогда сфера изобретать (de transcendance) будет третьей. Четвертой принадлежит способность объединять чувственность с высшей способностью, т. е. изобрести то, что служит правилом без руководства правил посредством воображения, т. е. сфера гения, которую действительно нельзя причислять к сфере простого рассудка.

Сфера прозорливости представляет собой систематическое усмотрение связи разума в единой системе понятий. Сфера гения — это связь первой с непосредственностью чувств.

Стержнем концепции Белосельского-Белозерского является то, что настоящие знания и умения делятся на уровни, далеко отстоящие друг от друга, а между уровнями лежат громадные пространства квазизнаний, умствования, мудрствования, квазиумений (заносчивой халтуры). Игнорирование того, что знания и умения имеют качественно разные уровни, которые зачастую плохо согласуются между собой, но по отдельности успешно применимы, является одной из бед современных научных исследований и практических систем. А игнорирование того, что нельзя переползти с одного уровня на другой (можно либо перепрыгнуть, но это рискованно, либо быстро пробежать, не задерживаясь, но после основательной подготовки), является одной из бед современной системы обучения. Переученный человек обычно хуже чуть недоученного.

Схему знаний по Белосельскому-Белозерскому можно представить следующим образом (*см.* рис. 3.2). На схеме снизу (цветом) даны наименования сфер разума, а сверху — промежуточных пространств.

Сокращенно концепцию Белосельского-Белозерского будем называть *кон-*

Рис. 3.2: Сферы Белосельского-Белозерского

цепцией князя или *сферами разума*. Она была оценена критиком, стоявшим на высшей ступени человеческого рационального мышления, но она же грубейшим образом противоречила примитивной концепции рационализма, которую агрессивно вбивали в головы просветители. Идол Прогресса, как и любой другой идол, требовал и кровавых, и духовных жертв. Масонско-иллюминатское сообщество[10] переняло методы своих закоренелых врагов — иезуитов, и стало «успешно» применять их для внедрения квазирелигии прогресса вместо традиционных религий. Поэтому работа князя была на два столетия забыта и вытащена из небытия А. Гулыгой в конце 70-х гг., когда примитивная концепция непрерывного знания и непрерывного прогресса стала доказывать свою несостоятельность на современном этапе.

Упражнения к §3.2

3.2.1. Ниже приведен текст перевода окончательного варианта письма Канта на русский язык XVIII века. Проанализируйте, что добавилось и что утеряно в окончательном тексте по сравнению с черновиком, и догадайтесь, почему автор предпочел вставить в основной текст именно черновик.

Дианиология, сей драгоценный дар, который угодно было Вашему Сиятельству прошлого года препроводить ко мне, в точности ко мне доставлена. Два экземпляра оной сообщил я двум особам, способным

[10] Данные слова в данной работе являются не ругательством, а лишь констатацией исторического факта, кто именно стоял за концепцией прогресса. *Любая* концепция, превращенная в идола, начинает мстить своим обожателям.

оценить красоту оной. Время не изгладило во мне чувствий благодарности, коими я Вашему Сиятельству обязан; но отлагал день от дня засвидетельствовать оную. Чему причиной были случившиеся многие упражнения; а сверх того я хотел присовокупить к сему благодарению некоторые статейки поучительности, каковую почерпнул я из прекрасного Вашего сочинения. Однако могу я коснуться разве нескольких главных черт.

Чтоб дать схоластический образец замысловатому Вашему разделению способностей душевных и присвоить таким образом Ваши понятия, что может служить в пользу, то воображаю я сперва две *страны*, или *округи*, которые разделяются друг от дружки (*наши врожденные расположения*) (*наша природная Метафизика*). Страна разумения, по общему значению, *есть способность думать*, страна умоначертания, т.е. простая способность чувствительности и умозрения.

Первая из сих стран состоит из трех сфер, 1-ая сфера есть сфера понятия, или способности *понимать*, соображать Идеи и распоряжать свои примечания или умоначертания. 2-ая есть сфера разсудка или способности приспособлять сии Идеи к частным случаям in concreto, т. е. прилагать их к правилам разумения; и сие составляет собственно *рассудливость, le bon sens*. 3-ья есть сфера разума, или способности извлекать частное из цельного, т. е. умствовать по правилам.

Как скоро сии три *умственные способности первой стороны* употреблены будут сходственно с высокостепеннейшим *законоположением* разума к истинному человеку концу, то составят они сферу *философии*. А когда согласны будут и с нижнею способностью (с простым умоначертанием), а именно с частью составляющею ея сущность, которая есть творительница и заключается в воображении (однако не порабощая себя законам, а передавая своему стремлению почерпать в себе самих, так как особливо случается в изящных науках вообще), то составляют особенную сферу, т. е. *жени*,[11] что равняется со словом дар Творец.

Сим образом могу я найти пять сфер.

Когда наконец воображение уничтожается в произвольном своем действии и перерождается в простое чувствопонятие, или расстройство; когда не повинуется более разуму, а еще силится поработить его: тогда человек, спавши с звания (сферы) человечества, низвергается в сферу ошаления, или сумасбродства.

[11] Транскрипция французского произношения слова *гений*.

> Я прошу, Ваше Сиятельство, оказать снисхождение к сим моим малозрелым идеям; они начертаны здесь для доказательства, что размышлял о содержании замысловатого Вашего сочинения.
>
> Есмь и проч.

3.3 Уровни знаний и умений с логической точки зрения

Конечно же, прозрение Белосельского-Белозерского не является пророчеством, не подлежащим критике. Уже Кант несколько модифицировал его схему, как видно из приведенных писем. Рассмотрим, как концепция князя ложится на современные достижения логики и на проблемы «искусственного интеллекта».

Основная методологическая концепция современной науки в области соотношения данных, знаний и умений — то, что данные и умения порождают знания путем эмпирического либо теоретического обобщения. А знания позволяют упростить умения до методов применения знаний к соответствующим данным. Картина слишком хорошая, и она, как и всякая благостная сказочка, обязана быть не просто неверной, но и быстро заводящей в тупик.

С логической точки зрения простейший способ учесть рефлексию и внести коррективы в данную картину — распределить знания и умения по типам, как это принято в математике. При конструктивной интерпретации знаний сложность информации, требуемой для применения знания, приблизительно соответствует типу объекта, необходимого для его реализации.

3.3.1 Уровень насекомого

Низший уровень знаний и умений примерно соответствует уровню насекомого. Здесь имеется единая циклическая жизненная программа, выполнение которой разнообразится непосредственными реакциями на внешние раздражители. И сама программа, и реакции заложены заранее и совершенствованию в течение жизни не подлежат. К несчастью, мы видим и некоторых людей, практически действующих по тому же принципу (правда, их жизнь почему-то в литературе называют «растительной»).

Итоги

Преимущество такого уровня — то, что насекомое почти невозможно сбить с толку, оно все равно будет выполнять свою программу, и это может оказаться единственным шансом на выживание в совершенно непредсказуемых условиях. Далее, фиксированные рефлексы могут на самом деле быть достаточно сложными программами. Поэтому порой такой низший уровень рационального реагирования кажется почти что разумом, в отличие от следующего, на самом деле несравненно более близкого к разуму. Знаний здесь нет, потому что ничто не преобразуется. Да и умениями назвать фиксированные рефлексы чуть пышновато.

Недостатком является, пожалуй, лишь полное отстутствие обучаемости. Но одного этого недостатка хватает.

3.3.2 Стереотипное реагирование

Следующий уровень — уровень условных рефлексов или непосредственного (стереотипного) реагирования. Тут уж появляются настоящие знания и умения. Условный рефлекс состоит в распознавании ситуации и применении в ней некоторого фиксированного действия *с тем, чтобы получить желаемый результат*. Это действие уже целенаправленное, такое существо уже обучаемо.

Центр тяжести стереотипного реагирования лежит в системе распознавания, которая и является соответствующим ему знанием.

Пример 3.3.1. *На уровне стереотипного реагирования чаще всего работают мошенники. У них есть несколько фиксированных программ и интуиция распознавания жертвы и подходящей ситуации для ее облапошения. Смотри, например, карманников в транспорте (обращайте внимание на ребят, которые почему-то толкутся у дверей в переполненном автобусе), наперсточников и шулеров в поездах.*

Пример 3.3.2. *Жившая у нас кошка в квартире в ответ на стандартный призыв 'кис-кис-кис' бежала к своей миске, а на улице — к нам.*

С логической точки зрения данные, участвующие в процессе стереотипного реагирования, могут рассматриваться как элементарные факты вида

$$P(c_1,\dots,c_n) \text{ или } \neg P(c_1,\dots,c_n) \tag{3.2}$$

или, в самом общем случае, как их булевы комбинации. На самом деле и булевыми комбинациями чаще всего являются конъюнкции фактов, дизъюнкции уже слишком тяжело постигаемы. Соответственно, вовлеченные в процесс реагирования знания можно описать в форме

$$\forall x_1,\dots,x_n(A_1(\vec{x})\ \&\ \cdots\ \&\ A_k(\vec{x}) \Rightarrow Q(\vec{x})), \tag{3.3}$$

где A_i — либо предикаты, либо их отрицания.

Пример 3.3.3. *Примером стереотипного реагирования, переведенного на уровень насекомого, являются шахматные программы разыгрывания стандартных эндшпилей. Строится полная таблица позиций данного эндшпиля (скажем, ферзь против ладьи), и для каждой позиции путем полного перебора помечается, выигрышная она, проигрышная или ничейная, причем при выигрышных и проигрышных дополнительно отмечается число шагов до выигрыша либо, соответственно, проигрыша. Теперь достаточно распознать ситуацию в том смысле, что просмотреть все позиции, которые могут получиться из текущей за один ход, и сделать данный ход.*

Пример 3.3.4. *Стереотипное реагирование — тот тип знаний и умений, которому обучают на фирменных курсах и который является наиболее распространенным в американской системе образования (в противовес европейской). В результате человек запоминает, скажем, для компьютерной системы, какую кнопку надо для какого действия нажимать, но требует переучивания при появлении новой версии системы, а тем более новой системы, хотя бы и построенной на тех же принципах.*

На данном уровне мышления возможны два способа обучения. Во-первых, затверживание новой ситуации при помощи, как правило, нескольких повторений. Во-вторых, свертка нескольких обычно следующих друг за другом стереотипных действий в новое единое действие.

Классическим примером системы знаний, построенной по данному принципу, является система предписаний «Талмуда». Четко расписано, что в каких ситуациях еврей должен делать, и чего он делать не должен. Но, конечно же, и жизнь изменяется, и список ситуаций не может быть полным. И «правоверные иудеи», положив бутылку воды под сидение автомобиля, считают, что они соблюли предписания: ведь в субботу нельзя путешествовать, кроме как на воде!

В качестве второго примера можно привести беса Л. Андреева, который учился делать добро. Поскольку у него не было понятия добра, обучавший его священник в конце концов просто дал ему список правил, которыми нужно руководствоваться, а во всех остальных случаях посоветовал просто ничего не делать.

На уровне стереотипного реагирования действуют большинство специалистов не очень высокого класса, независимо от формального названия их специальности. Но типичен данный уровень скорее для рабочего и техника.

Логически именно данному уровню соответствуют основные построения индуктивной логики, начиная с Ф. Бэкона [5] и кончая современными методами планирования, основанного на распознавании образов.

Далее, на этом же уровне организована база знаний типичного эрудита.

Он чисто формально достает по ключевым словам сведения, которые кажутся ему необходимыми.

Тест на данный уровень — поставить задачу, требующую планирования на 2–3 шага вперед.

Первые зачатки критического мышления также появляются на данном уровне. Человек, овладевший принятой в данном сообществе системой стереотипного реагирования, начинает отвергать всевозможные новшества, противоречащие принятой системе понятий и реакций на различные ситуации. Типичная критика на данном уровне «Так не делают». Такая критика зачастую раздражает как тупой консерватизм, но она позволяла выжить традиционным обществам и традиционным ценностям под натиском скороспелых реформаторов.[12] Это — первый уровень самозащиты человека от попыток недобросовестного психического манипулирования. Если человек, обладающий консервативным критическим мышлением, унаследовал *здоровую систему традиций здорового общества*, он достаточно хорошо защищен от примитивных психических и социальных атак. Но он ***заодно отвергает и попытки помочь ему, вывести его из тупика, в который его завела традиционная система ценностей и поведения в изменившихся условиях***. Правда, слишком часто оказывалось в конце концов, что традиционно ориентированные люди выживали в условиях быстро меняющейся обстановки лучше, чем те, кто пытались быть прогрессивными, потеряв при этом основу.

Итоги

Достоинством стереотипного реагирования является быстрота ответа на знакомую ситуацию, соединенная с возможностью перевести незнакомую ситуацию в разряд знакомых. Быстрота стереотипного реагирования, тем не менее, порою хуже реакции насекомого, поскольку все-таки сначала нужно распознать ситуацию, тем более, если она не является проходной.

Еще одним достоинством является стимул к обучению, когда ситуация распознается как не подходящая ни под одно из стандартных действий.

Недостатками являются, во-первых, возможность растерянности и паники при возникновении непредусмотренной ситуации, и, во-вторых, возможность *сшибки* при условии, что сразу несколько стереотипных действий кажутся применимыми. И того, и другого недостатка насекомое лишено. Оно просто действует.

3.3.3 Тупость

Это пространство находится между сферами фиксированной программы и стереотипного реагирования. Но анализ его лучше поместить после следу-

[12] И в таком случае она получает почетное наименование «Здравый смысл».

ющей за ним сферы разума, поскольку в него попадают на полпути между данными сферами.

Тупой человек не может распознать ситуацию, но пытается применить то, что он видел в качестве успешных действий других. Ярче всего она описана в русских сказках про дурня (или же в стихотворении Кирши Данилова, включенном в «Азбуку» Л. Н. Толстого). Таким образом, тупой человек теряет преимущества насекомоподобного поведения, пытаясь обучиться, но обучиться на самом деле не может, и начинает вести себя совершенно неадекватно. Лекарство от тупости — как правило, еще большая тупость: затвердить несколько фиксированных правил (очень мало, чтобы не сбиваться), и выполнять данную систему правил как программу с инстинктивными реакциями.

3.3.4 Комбинационное (комбинаторное) планирование

Следующие уровни связаны уже с преобразованием знаний и умений. Но преобразования низшего уровня не определяют однозначно возможных преобразований высших уровней, и это проявляется уже на втором уровне знаний и умений. А именно, преобразовывать простейшие правила стереотипного реагирования можно двумя способами. Во-первых, можно строить длинные их цепочки, планируя на несколько шагов вперед, во-вторых, можно преобразовывать сами условия. Эти два уровня приводят к двум разным типам мышления. Мы начнем с первого из них, когда строятся комбинации стереотипных действий.

Впервые данный уровень мышления был, видимо, выделен явно в шахматах, где достаточно быстро стали различать комбинационное дарование игрока и позиционные навыки. Комбинация в шахматах — совокупность форсированных ходов, в ходе которых игрок несет либо может понести некоторый материальный ущерб с тем, чтобы по ее завершении получить преимущества (типично — заматовать противника, порою — отыграть материал с лихвой либо спасти безнадежную партию, сейчас в партиях мастеров зачастую — получить стратегически лучшую позицию, чем та, которая была перед началом комбинации). Итак, в комбинации есть целая последовательность (и, возможно, разветвленная) действий, результат каждого из которых предсказуем, но настоящей целью осуществляющего комбинацию является лишь результат последнего действия. В некотором смысле начальные действия подготавливают почву для заключительных.

Комбинационные игроки хорошо справляются также с т. н. позициями, требующими конкретного расчета, когда нужно предусматривать результаты последовательностей практически вынужденных ходов.

Комбинационному дарованию в шахматах соответствует тактическое планирование в военных действиях, когда, как правило, недостаточно рассчитывать на шаг вперед, а нужно иметь в виду целую последовательность действий и ответов на возможные контрдействия противника, с тем, чтобы выполнить стоящую перед соединением задачу.

Комбинационному планированию соответствует логический вывод, не содержащий лемм (нормализованный логический вывод). Если входящие в него формулы имеют вид 3.3, то вывод практически сводится к тому, что в «искусственном интеллекте» называется *системой продукций*.

Если же план разветвленный, то продукций недостаточно, и нужны формулы, превосходящие даже то, что заложено в знаменитом языке программирования Пролог:

$$\forall \vec{x}(A_1(\vec{x}) \,\&\, \cdots \,\&\, A_k(\vec{x}) \Rightarrow B_1(\vec{x}) \vee \cdots \vee B_m(\vec{x})). \tag{3.4}$$

Комбинационное планирование, как показали эксперименты с животными, тот высший уровень, на который они могут подняться.[13] Так что и его типично человеческим назвать нельзя, какой-нибудь хищник строит не менее далекие комбинации, чем армейский или флотский капитан.

Надо заметить, что стандартное применение традиционной логики выводит нас именно на данный уровень. Это особенно четко прослеживалось в ее схоластической традиции с длинными цепочками силлогизмов и правил вывода.

Данный уровень типичен для программиста, инженера, искусного рабочего.

Одной из опасностей, возникающей при владении данным уровнем, является соблазн поиска лобовых решений там, где надо было бы переформулировать задачу в соответствии с системой ценностей и искать новую цель. Такой человек обычно рвется к победе, игнорируя то, что она грозит стать пирровой.

Итоги

Достоинства комбинационного планирования. Первое из них — возможность полной перемены декораций в результате последовательности хорошо спланированных действий. Побочным результатом является зачастую паралич стереотипно реагирующих оппонентов либо завлечение их в ловушку непосредственными выгодами. Комбинатор стремится перевести ситуацию в необычную по сути, где стереотипные рецепты не действуют. Комбинатор успешно ищет новое решение там, где другие не могут соединить несколько старых.

[13] Если в дальнейшем будет доказано, что они могут подняться еще выше автор с удовольствием возьмет свои слова назад.

Еще одним достоинством является то, что человек, комбинирующий свои приемы, вынужден пересматривать их на предмет согласованности, и поэтому даже база стандартных приемов у него обычно гораздо лучше структурирована, чем у того, кто работает на уровне условных рефлексов.

Далее, комбинатор обычно оптимистичен, поскольку мир кажется ему единым, и наслаждение от поиска новых решений добавляет положительного настроя в его жизнь.

Недостатками являются, во-первых, необходимость заранее продумать и спланировать действия, что, как правило, противоречит быстроте реакции. Во-вторых, ненадежность создаваемых планов, даже если каждое действие вполне надежно и результат его предсказуем. Чем длиннее и разветвленнее план, тем он уязвимее.

Еще один недостаток людей, которым свойственно комбинаторное мышление — плохая приспособляемость к ординарным ситуациям. Зачастую они просто обостряют ситуацию, переводя ее в чрезвычайную, лишь потому, что уже не могут выносить выжидания. Это может локально улучшить положение комбинатора, но стратегически он проигрывает.[14]

Люди, владеющие комбинаторным мышлением вместе с логическими либо математическими орудиями, являются мощным инструментом обскурантизма, поскольку они моментально видят несогласованности как новых концепций с тем, что считается почти догмой, так и внутри самих новых концепций. Именно на данном уровне работали квалификаторы Священной Инквизиции.

Комбинаторное мышление часто связано с излишним стремлением даже не к успеху, а к победе. Лучший способ обезвредить комбинатора в жизни — дать ему одержать пиррову победу и воспользоваться ее плодами.

Более того, часто комбинатор не может воспользоваться плодами победы либо потому, что он слишком наслаждается победой, либо потому, что он, наоборот, не закрепив достигнутого, уже задумывает новую комбинацию, мчится вперед. Эти две ошибки обычно не совмещаются у одного и того же человека. Они связаны с внутренней системой ценностей. Тот, кто выше ценит результат, впадает в первую, а для кого важнее процесс и азарт борьбы — во вторую.

Глупость

Пространство между стереотипным реагированием и комбинационным планированием — типичная *глупость*. Человек не желает пользоваться извест-

[14]Таково, например, было поведение Б. Н. Ельцина в те годы, когда он еще мог что-то делать по физическому состоянию.

ными ему рецептами, пытается рассчитывать вперед, но сам себя запутывает в своих расчетах, не принимая во внимание возможные (а то и наиболее вероятные) последствия своих действий.

Например, распространенное глупое рассуждение

> Куплю 50 бутылок пепси-колы, сдам пробки, выиграю путевку и поеду встречать Новый Год в Париж.

Как видно, рекламодатели вовсю используют человеческую глупость (тупость тоже)…

В данной области находится и *методичность* как форма классической немецкой глупости. Методичность не имеет никакого отношения к методу. Методичный человек планирует свои действия намного вперед и теряется при нарушениях режима, регламента и т. п. Но в неизменной, полностью рутинной обстановке методичность может быть выигрышным способом поведения.

То, что путают методичность и метод, связано с некоторым их подобием в том отношении, что и методичность, и метод основаны на одной модели. Но для метода это — модель мира, причем высокого уровня, а для методичности — чаще всего модель действий (даже если это — модель мира, то крайне примитивная, описывающая лишь то его состояние, которое привычно для социума, окружающего данный индивид).

Методичность немного похожа и на уровень насекомого, но принципиально отличается от него и сложностью программы, и реакцией на непредусмотренные ситуации.

Методичность, как показали личным примером И. Кант и лорд Кавендиш, может быть прекрасным способом для человека, имеющего прочное положение и гарантированный комфортный прожиточный минимум, а также живущего в стабильном обществе с установившимися нормативами поведения, снять с себя бремя забот о повседневных потребностях и сосредоточиться на более высоких материях.

Упражнения к §3.3.4

3.3.4.1. В какую сторону отличается сложность программ и качество реакции методичного человека от насекомого? Детальнее проанализируйте в совокупности соотношения между методичностью и уровнем насекомого.

3.3.5 Стратегическое планирование и преобразование действий

Возможно идти и с другой стороны. Часто достаточно преобразовать рутинную формулу, чтобы она повернулась другой стороной, но для этого нужно владеть системой преобразований утверждений, понятий и умений.

Впервые такую систему преобразований пытались систематически развить мудрецы-раввины, столкнувшиеся с необходимостью выполнять канонизированные, но зачастую противоречивые требования Талмуда, да еще и принимать согласно тому же Талмуду решения в непредусмотренных ситуациях.

Пример 3.3.5. *В «Талмуде» предусмотрены наказания тому, кто присвоил овцу или осла другого еврея, но не указано наказание тому, кто присвоил козу. Раввины назначали его по следующей логике: коза ценнее овцы, но менее ценна, чем осел. Поэтому и наказание должно быть больше, чем за овцу, но меньше, чем за осла.*

В традиционной логике зачатки такой системы преобразований были (например, обращение и превращение суждений). Но в системе изложения они оставались на обочине, задавленные прямым и внешне могучим оружием силлогистического вывода.

Пример 3.3.6. *Например, предложение*

Ни один русский не побывал на Луне (3.5)

может быть обращено как

Те, кто побывали на Луне — не русские (3.6)

и превращено как

Луна — то место, где не побывал никто из русских. (3.7)

Пример 3.3.7. *Знаменитый своей кошмарной утопией «Город солнца» левый экстремист XVII столетия Томмазо Кампанелла строил свою[15] защиту от квалификаторов Священной Инквизиции, показывая, что утверждения, которые были квалифицированы ими как еретические, на самом деле являются эквивалентными переформулировками положений Священного Писания.*

Заметим принципиальную разницу между приемами раввинов и схоластов. Преобразования раввинов формально неэквивалентные, они выводят действительно новое предписание из старых. Преобразования схоластов формально являются эквивалентными, хотя зачастую человеком воспринимаются совершенно по-разному.

[15] И других узников, которые имели возможность обратиться к нему за помощью.

Пример 3.3.8. *Рассмотрим знаменитый пример из истории дипломатии.*

Во время одной из гражданских войн между гугенотами и католиками во Франции мирные переговоры казались зашедшими в полный тупик. Католики были согласны, чтобы протестантское вероисповедание было разрешено кое-где, но настаивали, чтобы оно было запрещено вообще, а в особенности в тех областях, где оно до тех пор не распространялось. Гугеноты, наоборот, настаивали, чтобы оно было разрешено, но, правда, понимали, что в некоторых областях разрешение его вызовет возобновление беспорядков.

Формулировка, которая устроила обе стороны, была следующая.

Протестантизм разрешен повсюду, кроме тех мест, где запретить его будет благоугодно королю.

Логически уровень преобразований представляется как применения пропозициональных и предикатных эквивалентностей. Как показывают примеры с раввинами и из дипломатии, данная модель не отражает его полностью.[16] Но данная модель позволяет увидеть качественный скачок при переходе от комбинаторного уровня к данному. Эквивалентность даже пропозициональных высказываний — экспоненциально трудная задача, и, таким образом, преобразование объективно намного труднее композиции.

Но если план разветвленный, то чисто формально комбинаторное мышление становится не менее сложным, чем преобразования.

Вторая логическая характеризация данного уровня — классические Π-формулы вида $\forall\vec{x}\,\mathfrak{A}(\vec{x})$, где $\mathfrak{A}$ — произвольная бескванторная формула, и Σ-формулы вида $\exists\vec{x}\,\mathfrak{A}(\vec{x})$.

Еще одна логическая характеризация — конструктивные формулы вида $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$, где посылка и заключение — любые классические пропозициональные формулы.

Функциональная характеристика — алгебра функций.

Сфера преобразований — уровень деятельности программиста-постановщика, отличного рекламного агента и хорошего дипломата, хорошего математика (особенно теоретика), хорошего философа.[17]

Заметим, что применять композиции и преобразования вместе крайне опасно, поскольку ненадежности обоих способов великолепно дополняют друг друга.

На этом уровне работают и работали большинство из тех, кто стали признанными гениями. В частности, он четко прослеживается у Эдисона, Бербанка, Наполеона I.

[16] Впрочем, мы неоднократно подчеркивали, что такова всякая разумная модель сложных понятий.

[17] Слово *хороший* включает в себя ограничения и сверху и снизу: существенно выше среднего уровня, но не выдающийся.

Оптимизм предыдущего уровня сменяется здесь некоторым пессимизмом. Поскольку человек видит, как можно преобразовывать понятия и цели, он начинает, почти как Экклезиаст, восклицать:

— Бывает нечто, о чем говорят: «смотри, вот это новое»; но это было уже в веках, бывших прежде нас. [18]

Ведь такой человек ясно видит, что то, что выдают за новое — всего лишь старое вино, влитое в новые мехи и сверху расцвеченное новыми узорами. И, вместе с тем, как тот же Экклезиаст, человек на данном уровне, если не теряет ориентировки на высшие ценности, начинает благодарить Бога либо судьбу за то, что она дала ему умственное зрение:

— У мудрого глаза его — в голове его, а глупый ходит во тьме. Но узнал я, что одна участь постигает их всех.[19]
Мы специально не оборвали цитату на более «удобном» месте после первого предложения, поскольку «Многия знания — многия печали».

Итоги

Достоинства уровня преобразований. Прежде всего, таковой является возможность представить имеющиеся знания в нужной форме либо перенести их на случай, подобный рассмотренным, но не рассмотренный ранее. Пожалуй, здесь впервые знания становятся настоящими знаниями.

Далее, преобразования позволяют лучше структурировать пространство знаний, и заставляют нас иметь единую модель мира, что обеспечивает цельность восприятия.

И, наконец преобразования позволяют трезво оценить ситуацию, определить, в чем заключается стратегический выигрыш, и идти к нему, невзирая на частные поражения.

Недостатки — прежде всего, отсутствие дальнего расчета и игнорирование побочных эффектов преобразований. Второй недостаток — отсутствие быстрой реакции на мимолетные возможности. И, наконец, слишком часто преобразования ограничены узкой областью и базируются на излишне жесткой модели мира, что ведет к узости кругозора человека, работающего на данном уровне.

3.3.6 Релятивизм и точные науки

Пространство, промежуточное между сферой и преобразований и предыдущими сферами описывается сложнее, потому что сферу преобразований нельзя однозначно поставить выше сферы комбинаторного мышления. Основной

[18] Экклезиаст, гл. 1, стих 10.
[19] Экклезиаст, гл. 2, стих 14.

чертой релятивизма является наглое передергивание фактов, положений, законов. Поскольку *по виду* эквивалентные предложения часто не имеют между собой ничего общего, а также потому, что, соединяя комбинаторику и преобразования, можно из формально противоречивой системы знаний[20] вывести все, что угодно, человек, попавший в данное пространство, зачастую стремительно превращается в законченного скептика и циника, тем более, что ему при этом способствуют и практика, и теория нынешнего общества.

> Закон — что дышло, куда повернешь, туда и вышло.[21]

> В текст можно вчитать любой смысл.

Таким образом, кажется, что ничего установленного нет, что с фактами также можно вести себя самым бесстыдным образом (тем более, что в политике и в истории все равно с ними слишком часто ведут себя именно так.)

Другой стороной данного пространства является еще один возможный вывод, который делают люди, имеющие внутренний иммунитет к огульному скептицизму и приспособленчеству. Поскольку лишь точные науки выдерживают проверку комбинацией композиций и преобразований, то лишь они имеют право на существование, а гуманитарное знание знанием просто не является.[22]

При взаимодействии данных систем взглядов у выдающегося представителя данного пространства возникает соблазн пересмотреть накопленное в гуманитарных областях «дерьмо» точными хирургическими методами, вовсю используя и преобразования, и композиции. Самым ярким примером данного подхода ныне являются работы гиперкритиков в истории [52, 15, 7].

3.3.7 Владение методом

Метод — это общий способ преобразования преобразований планов. Примерами методов могут служить метод динамических систем и метод алгебраических систем (представленный в теории категорий как диаграммный поиск) в математике. К несчастью, изложение существующих методов в других науках не доведено до такой степени точности и конкретности, чтобы на них можно было сослаться здесь.

---

[20] Которой является практически любая система знаний человечества, кроме нескольких точных наук.

[21] Или, как говорят деятели нашей юстиции, *«Был бы человек, а статья найдется.»*

[22] Как сказал автору один математик, когда появились первые работы по формализации неформализуемых понятий: «Если понятию не может быть придан однозначный точный смысл, то оно просто не является понятием.».

С логической точки зрения метод выражается как сколь угодно сложная формула классического исчисления предикатов (либо П-формула классического исчисления предикатов второго порядка). Альтернативная логическая характеристика — конструктивное исчисление высказываний либо ограниченное конструктивное исчисление предикатов.

Функциональная характеристика — функционалы второго порядка, организованные в достаточно богатую структуру, которая может рассматриваться как функционал третьего-четвертого порядка.

Характерная черта такого уровня — *взаимосогласованные модели мира и действий*. Это создает некоторую завершенность знания, и зачастую человек, работающий на уровне метода, владеет одним-единственным методом, которого ему хватает.

Применение метода требует подстановки в него целых планов и условий, это — конкретизация понятия высшего уровня, которая сама по себе является алгоритмически трудной операцией.[23]

Сфера метода — уровень, присущий рабочим-асам, исключительно высококвалифицированным инженерам и врачам европейской медицины, квалифицированным ученым, особенно теоретикам в точных науках и прикладникам-математикам, не замыкающимся в узкой области, гроссмейстерам и полководцам-стратегам.

Пример 3.3.9. *Пример борьбы метода против преобразований — кампания Кутузова против Наполеона. Наполеон блестяще владел преобразованиями композиционных планов, что на уровне сражений и тактических маневров кажется стратегией, но, столкнувшись с настоящей стратегией, безнадежно проиграл, потеряв свою армию и сохранив в целости российскую, причем выигрывая все битвы, в том числе и спасая стратегически совершенно безнадежные.*

Таким образом, здесь и превосходство в силах, и собственное искусство, и ошибки противника не спасли сторону более низкого уровня от разгрома.

Но стоит отметить, что ошибки русских полководцев не были системой, русские генералы ненамного уступали в квалификации наполеоновским маршалам (и зачастую били их; непобедимым оставался лишь сам Наполеон), а русские офицеры и солдаты были не хуже французских. Плохое исполнение, конечно же, уничтожило бы план.

Уровень метода соответствует тому, что часто называют системным взглядом. Именно поэтому системный подход при систематическом изложении практически неизбежно сбивается к применениям одного из методов, чаще всего метода динамических систем.

[23] Известно, что унификация по типам выше первого неразрешима.

Сфера метода — это типичный уровень творческого лидера, основателя научной школы либо (возможно, даже не тоталитарной) секты. При отсутствии вкуса к руководству и коллективному действию это — оптимальный уровень советника и эксперта. Но выводы данного советника требуют перепроверки на другом уровне. Если он дает предупреждение, то он, как правило, прав. Если он дает положительное заключение, это должно настораживать.

Сфера метода — исключительно оптимистичный уровень. Цельная картина Мира и Идей способствует активному (практическому либо духовному) действию человека, прочно вставшего на этот уровень, а высота уровня в значительной степени страхует его от последствий неизбежных тактических ошибок, что еще добавляет настоящего оптимизма, а именно, устойчивости к неудачам, и отвращает от поддельного оптимизма, выражающегося американским лозунгом: “Удача за следующим углом”.[24]

Недостаток уровня метода — прежде всего, иллюзия завершенности знания, которая возникает из-за единой модели мира и действий. Человек, в совершенстве владеющий методом, зачастую считает, что практически все можно сделать данным методом.

Пример 3.3.10. *Рассмотрим теперь пример, противоположный примеру 3.3.9, а именно, когда уровень, который (в зависимости от рассматриваемого программного субъекта) можно отнести либо к стереотипному реагированию, либо даже к уровню насекомого, бьет и метод, и преобразования, и комбинации. Вспомним эндшпильные программы из примера 3.3.3.*

Когда с программой, разыгрывающей эндшпиль «Ферзь против ладьи», стали играть сильнейшие шахматисты разных стилей за сильнейшую сторону, то быстро выяснилось, что за исключением простейших случаев, они безнадежно упускают выигрыш. Они пытались либо рассчитать последовательность ходов, либо построить стратегию, а программа делала ход, который для человека выглядел совершенно нелепым, но оттягивал проигрыш на максимальное число ходов, человек вновь пытался взять ситуацию под контроль и допускал новую оттяжку, и так далее, пока не проходили положенные по правилам 50 ходов.

А когда были проанализированы эндшпили «Ладья со слоном против ладьи» и особенно «Ладья с конем против ладьи», то программы в этих концах, ранее казавшихся практически ничейными, почти всегда выигрывали у

[24] Тот, кто слишком стремится к удаче и боится быть looser’ом, на самом деле не может достичь настоящей удачи, которая приходит тогда, когда человек уверенно преодолевает неудачи, стремясь к хорошо поставленной цели хорошо продуманными путями. Еще Тит Ливий отмечал, что сила Рима была именно в умении переносить неудачи и даже катастрофические поражения. Побеждать умели и другие…

человека за сильнейшую сторону и делали ничью за слабейшую.

Таким образом, человек данного уровня часто может недооценить последствия мелких тактических неудач, и тогда его здоровый оптимизм оборачивается своей уязвимой стороной (которая есть у любого метода и любой стратегии).

Еще один общий недостаток высших уровней (начинающихся именно с уровня метода) — тот, что на них трудно удержаться. Чтобы стоять на месте, здесь нужно бежать, а чтобы попасть в другое место,— бежать вдвое быстрее (Л. Кэррол). Абсолютизация метода и успехи, связанные с его применением, вызывают некритическое восприятие и у самого человека, и (еще чаще) у окружающих его учеников и почитателей. Тут-то он свергается в бездну, которую мы сейчас и опишем.

3.3.8 Умничанье, мессианство

Это — два различных проявления пространства перед сферой метода. Человек, на самом деле не овладев методом, пытается его применять и запутывается в конкретизациях высокоуровневых понятий. Это — умничанье. Такой человек сам себя приводит к неправильным решениям в простейших ситуациях, где надо было бы перейти на более низкие уровни.

Мессианство — человек, достаточно овладевший методом, чтобы его применять, но недостаточно им овладевший, чтобы понять, когда применять его не нужно.[25] Заметим, что человек, устойчиво вставший на сферу метода, хотя, возможно, и абсолютизирует свой метод, тем не менее четко чувствует случаи, когда применять его не стоит. Его защитной реакцией в подобных ситуациях[26] является характеристика возникшего положения либо рассматриваемого вопроса как такого, в котором нельзя пользоваться средствами слишком высокого уровня. При этом говорятся слова, подобные таким: ≪Ну, это

[25]Это состояние великолепно описал гр. А. К. Толстой [48, с. 111]:

> Хорошо, братцы, тому на свете жить,
> У кого в голове добра не много есть,
> А сидит там одно-одинешенько,
> А и сидит оно крепко-накрепко,
> Словно гвоздь, обухом вколоченный.
> И глядит уж он на свое добро,
> Все глядит на него, не спуская глаз,
> И не смотрит по сторонушкам,
> А знай прет вперед, напролом идет,
> Давит встречного-поперечного.

[26]Кстати, почти всегда оправданной.

не научная, а житейская (бюрократическая, техническая) проблема≫.

Пример 3.3.11. *Рассмотрим пример сползания со сферы метода в пространство умничанья, приведший к катастрофической стратегической неудаче.*[27]

К I Мировой войне Германия подошла исключительно хорошо подготовленной и технически, и организационно. Был разработан стратегический план, который, при его успешном проведении, мог вырвать ее из практически безнадежной ситуации войны на два фронта. Он известен под именем «План Шлиффена». Согласно данному плану, составленному весьма безжалостно, как и всякое нетривиальное решение сложной проблемы по необходимости достаточно простыми средствами,[28] *Германия должна была первоначально наступать лишь на одном, но решающем, направлении, оставив на других лишь силы сдерживания, которые должны были в случае натиска отступать с боями до естественных рубежей. Так, в Эльзасе планировалось отступление до Рейна, в Польше — до крепостей Кенигсберга и Данцига на севере и, возможно, до Одера — на западе. Зато главные силы должны были, обойдя французскую оборону через Бельгию, затем обойти и Париж и принудить Францию к скорейшему выходу из войны.*

Более того, даже на основном театре военных действий обращалось внимание на то, чтобы не увлекаться победами. Шлиффен понимал, что французы, контратакуя превосходящие немецкие войска, будут подставлять себя под удары, и предупреждал против того, чтобы отвлекаться на соблазны уничтожить мелкие силы. Итак, если союзы противника немцы разбить не могли (и даже значительно расширили и укрепили их нарушением нейтралитета Бельгии), то замыслы его они разбили полностью, и все поставили на принцип Сунь-цзы: одержать одну победу, но решающую.

Обращается внимание на то, что план Шлиффена не учитывает действий противника. Но этот шедевр научного планирования составлен таким образом, что все естественные реакции противника идут на пользу не противнику, а плану. Так что разбить этот план могли лишь гений либо сами немцы.

Союзники из Антанты предвидели в теории возможность такого плана действий, и даже имели информацию о нем и от разведки, и от дипломатов, и даже из открытой печати[29]*, но считали план нереализуемым, поскольку*

[27] Хотя данный пример основан на целом ряде книг, безусловно, основным источником был прекрасный анализ Барбары Такман [47].

[28] «Говорят, что в данном случае не существует простых решений. Нет, простые решения существуют всегда, но не всегда они самые легкие.
(Р. Рейган)»

[29] В частности, сам Шлиффен перед смертью опубликовал отчаянную статью, в которой протестовал против корректировки его плана Мольтке-младшим, который по уровню, конечно же, был несравним со знаменитым Мольтке-старшим, однако по критериям родовитости,

не поняли его основной идеи. Шлиффен осознал, что войны опять становятся войнами массовых армий, и что резервисты составляют по меньшей мере равноценную регулярной армии, основанной на принципах всеобщей воинской обязанности, боевую силу. Стратеги Антанты смотрели на резервистов как на вспомогательные войска, пригодные лишь для гарнизонной и тыловой службы, и поэтому считали, что предусмотренный Германией обход нереализуем, поскольку просто не хватит войск, чтобы защитить фланги и коммуникации, и, следовательно, армия вторжения может быть легко отрезана и принуждена к капитуляции.

В 1908 г. Шлиффен ушел на пенсию, а его преемники, «совершенствуя» план, постепенно теряли его основную идею. Тем не менее, скорректированный план оставался вполне адекватен до самого начала войны.

Начало войны подтвердило правоту Шлиффена. Несмотря на то, что, вопреки расчетам германских политиков, Бельгия не разрешила мирный[30] *пропуск германских войск и оказала отчаянное сопротивление, почти день в день по плану Шлиффена немецкие войска пересекли французскую границу.*

В приграничном сражении французские и английские войска были побеждены и отброшены (правда, не разбиты полностью, но это и не предполагалось планом). Уже здесь некоторые немецкие генералы показали, что они совершенно не готовы пожертвовать своей сиюминутной выгодой и славой ради общей цели, тактической победой ради стратегической, но план был составлен слишком хорошо, у французов гения не нашлось, и реализация плана успешно продолжалась.

Немецкая армия вырвалась на просторы Франции, и тут немецкие руководители допустили первую серьезную ошибку. Находя брошенные склады продовольствия и амуниции, они подумали, что французская армия бежит в панике. Французы же просто подготовили склады на всех возможных путях отступления своей армии, считая, что самое главное, чтобы войска ни в каком случае не терпели недостатка ни в чем, а воевать по принципу «выжженной земли» еще не было принято. Пленных, конечно, было маловато для бегущей армии, но это как-то игнорировалось, тем более, что отдельные отставшие или заблудившиеся части и солдаты оказывались на пути немецкого воинства и сдавались его превосходящим силам.

Тем временем в Эльзасе и в Восточной Пруссии, как и предполагал Шлиффен, немцы отступали. Но в Эльзасе войском руководил кронпринц, которо-

---

учености и политкорректности занял в самое критическое время пост начальника Генерального штаба.

[30] Или практически мирный, как рассчитывали многие, в том числе и сам кайзер: дескать, бельгийцы, чтобы не потерять лицо и из страха перед Францией и Англией, отвергнут требование о пропуске войск через свою территорию, но не осмелятся фактически воевать, а просто выстроят свои войска вдоль дорог, по которым пройдут немцы.

му как-то позорно было терпеть поражения, когда обычные генералы побеждают. Поэтому, убедившись, что французское наступление развивается не слишком успешно, он буквально вымолил разрешение перейти в контрнаступление, мотивируя, что контрнаступлением он удержит против своей армии больше французских войск. За первые успехи в контрнаступлении многие получили железный крест, и среди них, конечно же, наследник престола.[31] *Лобовое наступление немцев, в свою очередь, быстро выдохлось, упершись в заранее подготовленные укрепления французов, и как раз оно позволило в решающий момент битвы на Марне снять с эльзас-лотарингского фронта лишние силы (обороняться-то можно и меньшими!)*

А в Восточной Пруссии местные помещики и вообще местное лобби были страшно напуганы перспективой эвакуации в Кенигсберг и Данциг, разграбления поместий и имущества. И часть войск была переброшена из ударного кулака на второстепенные направления.

И вот в районе 30 августа 1914 г. французский генштаб, изучая оперативную обстановку, вдруг увидел, что немцы подставляют французской армии незащищенный правый фланг. Конечно, через пару дней они бы закрыли дыру, но немцы не учли еще одного нового обстоятельства, возникшего после оформления плана Шлиффена: начала автомобилизации. Дыра была расположена так, что по железным дорогам перебросить большое войско к ней было затруднительно, и возможно (хотя теперь уже проверить нельзя), что испытывавшие недостаток сил для своих амбициозных целей немецкие генералы пошли на данную слабость не по недосмотру, а рассчитывая, что они успеют заткнуть дыру до французского удара. Но французы мобилизовали все парижские автомобили, и армия была переброшена на такси и частных автомобилях в течение одного (!) дня. Свежие французы вышли на неприкрытые фланги смертельно уставших немецких армий (германский генштаб, корректируя план Шлиффена, использовать автомобили для подвоза хотя бы части пехотинцев на решающем направлении так и не догадался). Знаменитая битва на Марне была выиграна французами, и война сразу же превратилась для Германии в стратегически безнадежно проигранную.[32]

Ничего уже не значили грубые ошибки Антанты и блестящее командование в большинстве операций германских войск. Даже совершенно невероятный успех политической кампании против России, которую невозможно было разбить военными средствами и можно было уничтожить лишь из-

[31]Есть побасенка, что в ту же ночь кронпринцу явился дух Шлиффена и поздравил его с тем, что он променял империю на побрякушку.

[32]Есть красивая легенда, что Шлиффен умирал как раз в те дни, когда немцы шли по Франции. На самом деле умер он в 1913 г., но его последние слова действительно были:

— Передайте кайзеру: держите правый фланг сильным!

нутри, ее собственными руками, приведя к власти предателей и экстремистов, уже не помог Германии.

3.3.9 Многоуровневое мышление

А беда тому, братцы, на свете жить,
Кому Бог дал очи зоркие,
Кому видеть дал во все стороны.
И те очи у него разбегаются;
И, кажись, хорошо, а лучше есть,
А и худо, кажись, не без доброго!
[48, с. 111]

Некоторые элементы данного уровня часто соединяют с системным подходом, но системный подход естественно располагается на предыдущем уровне, и подобное соединение приводит лишь к выбросу в следующее пространство мудрствования.

Логическим аппаратом данного уровня служит классическая теория неформализуемых понятий [29] и полная конструктивная логика.

Функциональной моделью здесь является пространство функционалов конечных типов.

Этот уровень требует альтернативных моделей мира и действий, каждая из которых внутренне согласована, и которые дают многомерный взгляд на проблему.

Он органичен для изобретателя высокого класса, системного аналитика, врача, склоняющегося к восточному подходу в медицине (т. е. лечащего не болезнь, а больного).

Недостатки. По сравнению с предыдущей сферой, человек на данной сфере зачастую становится менее активным. Он теряет ощущение целостности, приобретенное после овладения методом. Он начинает видеть недостатки и ловушки в слишком многих местах. Он не может быть единомышленником даже самому себе. В любой схватке он пытается, даже встав на одну из сторон, морально оказаться над битвой [33] Но достичь уровня полно-

[33] Двух станов не боец, но только гость случайный,
За правду я бы рад поднять свой добрый меч,
Но спор с обоими досель мой жребий тайный,
И к клятве ни один не смог меня привлечь;
Союза полного не будет между нами —
Не купленный никем, под чье б ни стал я знамя,
Пристрастной ревности друзей не в силах снесть,
Я знамени врага отстаивал бы честь!
[48, с. 95]

стью незаинтересованного действия он, как правило, не может. Это — не лидер, но ценный советник лидера, если лидер может воспринять его советы.[34] Главной трудностью восприятия является то, что такой человек все время подмечает недостатки в положительно охарактеризованном решении и достоинства в большинстве неудач. А это может сбить с толку прямолинейно мыслящего начальника. И уж окончательно негоден такой советник для тех, кто желает получить окончательный вывод, чтобы снять с себя бремя выбора. Для этого лучше подходят специалисты предыдущего уровня.

3.3.10 Мудрствование, интуитивизм

На полпути к уровню многоуровневого мышления застрял *интуитивизм*, образующий очередное пространство. Здесь данный термин, удачно изобретенный философами, не является названием философского направления, хотя слишком многие из адептов и некоторые из его основателей застряли именно в данном пространстве.

3.3.11 Дао

Этот китайский термин лучше всего выражает исключительно плохо передаваемое словами состояние понимания целостности мира, утерянной на предыдущей сфере.[35] Много говорить об этом не будем, тем более, что до этого уровня поднимаются единицы, а удерживаются на нем считанные по пальцам личности, и «Говорящий не знает, знающий — не скажет».

Логический аппарат данного уровня еще не разработан. Функциональная модель, пожалуй, бестиповое λ-исчисление.

Линий поведения у человека, достигнувшего данного уровня, бесконечно много, но общая их идея сводится к одной из двух: либо отшельничество (формальное или фактическое) и недеяние, либо полностью незаинтересованное активное действие. Второе встречается намного реже.

[34] И все люди его корят-бранят:
«Ишь идет, мол, озирается!
Ишь стоит, мол, призадумался!
Ему б мерить всё да взвешивать,
На все боки бы поворачивать!
Не бывать ему воеводою,
Не бывать ему посадником…»
[48, с. 111]

[35] Пожалуй, европейский термин ‘дух’ хуже.

3.3.12 Лжепророки

Это те, кто застряли в пространстве перед уровнем дао. Они принимают свои озарения, которые даются им ценой максимального напряжения интеллектуальных и духовных сил, за абсолютную истину, и тем самым убивают элементы[36] Истины, которые в них содержатся. Хотя такой самообман и понятен, вред, приносимый подобными людьми, как правило, субъективно искренними, слишком велик.

3.3.13 Химеры и вымыслы

Комментариев нет.

В заключение приведем рисунок 3.3, иллюстрирующий всю систему знаний и умений.

Упражнения к §3.3

3.3.1. Один ученый заявил:

> — На самом деле всегда выигрывает самый нижний уровень. Сколько бы человек ни выкручивался, в конце концов его съедят черви и микробы.
>
> Прокомментируйте данное рассуждение.

3.3.2. (Из книги [11]) Приведем начало и конец рассказа про Насреддина. Несчастный, упомянутый в его начале, хорошо знал свое дело и правильно толковал сон. Заполните пропуск.

> Эмир увидел во сне, что у него выпали зубы. Он вызвал к себе толкователя снов.
>
> — Не могу скрыть истины,— сказал тот, — ваши дети и ваши родственники умрут раньше вас!
>
> За такое мрачное предсказание эмир приказал казнить толкователя. После казни эмир встретился с эфенди:
>
> — Не можешь ли хоть ты объяснить мне подлинное значение моего странного сновидения?
>
> — Могу, долговечный государь!— ответил эфенди.—
>
> **...**
>
> Успокоенный эмир щедро вознаградил эфенди.

[36] Порою весьма значительные.

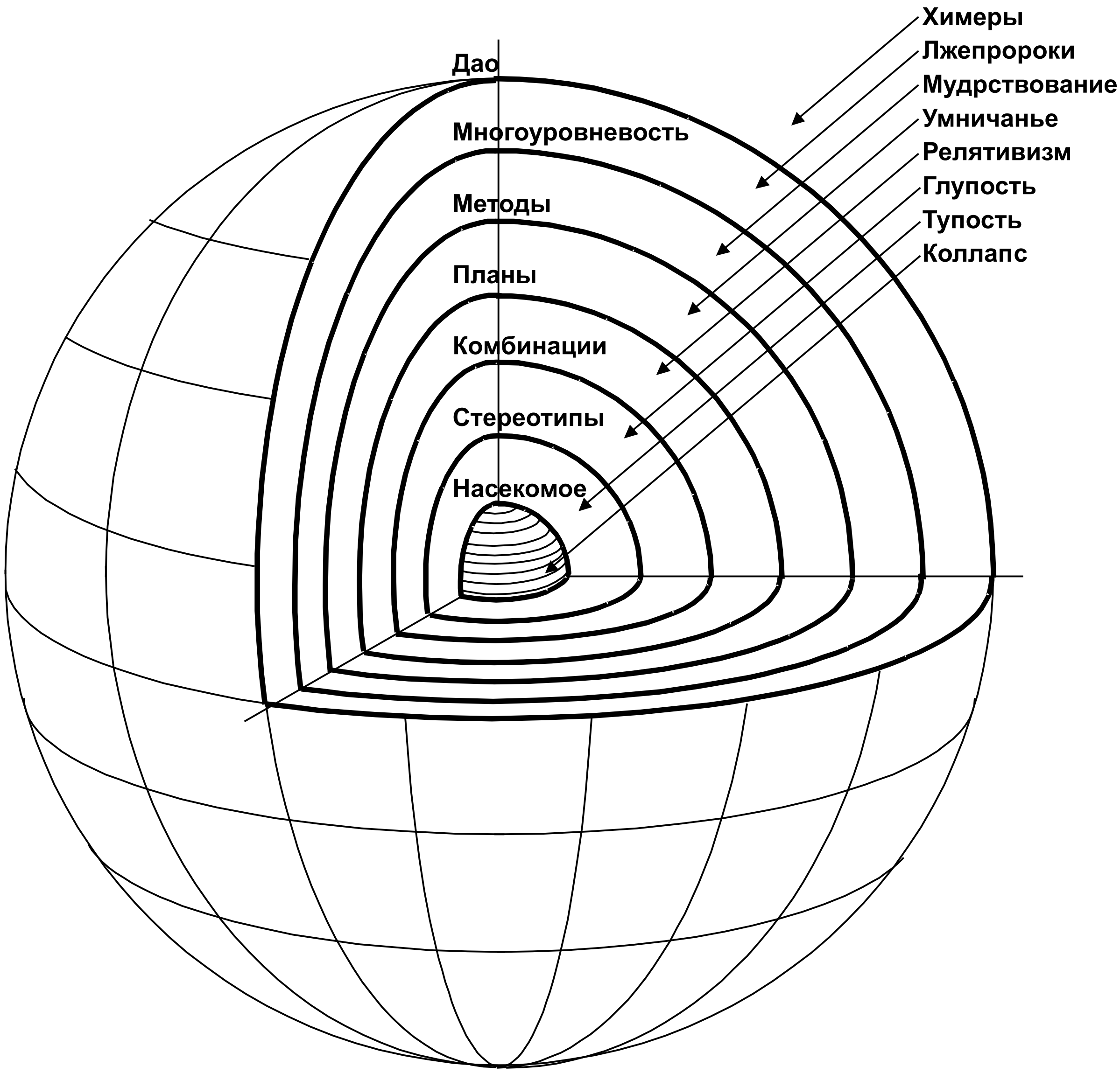


Рис. 3.3: Сферы знаний и умений

3.3.3. Сёгун Нобунага был исключительно жестоким тираном-правителем и абсолютно не терпел лжи. Внешность его соответствовала его внутренней сущности. Как-то раз он спросил приближенного самурая:

— Правда ли, что в народе болтают, что я похож на обезьяну?[37]

Самурай вежливо ответил:

— Никак нет, господин. …

Догадайтесь, как спасся самурай.

3.3.4. Перечитайте книгу Екклезиаста из Ветхого Завета. На каком уровне находился ее автор?

3.3.5. Еще одно стихотворение А. К. Толстого показывает стратегию поведения, возможно, согласующуюся с некоторыми уровнями. С какими она согласуется и, если согласуется, какие их недостатки может исправить и какой ценой?

Коль любить, так без рассудку,
Коль грозить, так не на шутку,
Коль ругнуть, так сгоряча,
Коль рубнуть, так уж сплеча!

Коли спорить, так уж смело,
Коль карать, так уж за дело,
Коль простить, так всей душой,
Коли пир, так пир горой!
[48, с. 68]

3.3.6. Дайте сравнительный анализ биографий и стратегий жизненного поведения лорда Кавендиша и У. Хевисайда. Проанализируйте их с точки зрения уровней знаний и умений, применявшихся данными личностями в различных сферах жизни.

3.3.7. Проанализируйте с точки зрения уровней знаний и умений книгу «Роза мира».

3.3.8. Е. Рерих.

3.4 Почему глупость иногда выигрывает?

Рассмотрим случаи, когда именно положение субъекта между сферами настоящего знания позволяет ему добиваться успеха в конкретной жизненной ситуации.

[37] Вы уже догадались, что это — правда.

3.4.1 Оратор либо научный популяризатор

Как ни странно, оптимальное состояние разума для немедленного успеха в данной области — глупость. Профессионал должен суметь надергать общеизвестных преобразований и скомбинировать их так, чтобы большинству *казалось, что получается нужный результат*. Согласованность не нужна, поскольку, если кто начнет копаться в несогласованностях, его можно сразу осадить с бешеным успехом у толпы: нам дело говорят, а он к каким-то мелочам придирается. Здесь эрудиция кажется знанием (вспомните морфологический ящик 3.1).

3.4.2 Проповедник либо судебный деятель

Его наиболее привлекательный с точки зрения успеха способ действий — казуистика, релятивизм. Он должен дать точные ссылки на нормы, а затем все передернуть, приспособить к данному конкретному случаю и вывести то, что ему нужно в данный момент.

3.4.3 Мессианство

Уровень умничанья и особенно **мессианства** часто является выигрышным по другой причине. Неподдельная и глубокая уверенность человека в собственной правоте практически гипнотизирует более слабых людей, а умение игнорировать ошибки и неудачи (и даже представлять их как удачи) помогает ему минимизировать немедленные отрицательные последствия недостатков и данного пространства, и сферы метода. Правда, отдаленные отрицательные последствия при этом катастрофически накапливаются, но слишком часто они обрушиваются на соответствующую секту либо клан уже после смерти основателя.[38]

3.5 Педагогические выводы

Первый вывод, который следует из концепции сфер — невозможность плавного перехода с одного уровня на другой. Каждый такой переход требует ломки стереотипов и перестройки всего стиля мышления и действий. Соответственно, процесс перехода должен быть трудным, и попытки полностью облегчить его лишь приводят к застреванию в очередном пространстве.

[38] Автор уверен, что душа основателя тем более несет неизбежную расплату за то, что он натворил, спутав прерогативы человека и Бога. Читателю же предстоит самому решить этот вопрос для себя.

Поставим теперь вопрос о том, насколько нужно развить предыдущий уровень, чтобы устойчиво удержаться на следующем. Знания и умения следующего уровня требуют владения и предыдущим. Более того, владеть им необходимо на достаточно хорошем уровне, чтобы не отвлекаться на сущности низших порядков при работе на более высоком порядке. Таким образом, здесь необходим *навык*, позволяющий переключаться в полуавтоматический режим на предыдущем уровне.

Но для личности достаточно высокого уровня необходимость отвлечения части сил на проведение не слишком хорошо освоенных действий и преобразований предшествующих уровней часто меньшее зло, чем увлеченность автоматизмом преобразований и неумение заметить момент, когда общепринятые «гарантированно правильные» и «азбучные» методы стали отказывать.

Поэтому второй вывод — возможность тренировки предыдущих уровней до автоматизма, вместе с недопустимостью их доведения до виртуозности.

Упражнения к §3.5

3.5.1. Нужны ли технические упражнения на тех уровнях, которые обучающийся в своем развитии *должен* превзойти? Если нужны, то на что нужно обратить внимание? Обращается ли на это внимание в стандартной практике преподавания?

Математический аппарат

Глава 4

Принципы системного и логического подходов

4.1 О системном подходе

Математика, поднявшаяся до уровня метода, и рационализм, поднявшийся на уровень одноуровневого критического мышления, привели к системному подходу. Основные постулаты его можно сформулировать следующим образом.

1. Любой объект входит в *системы*, в которых он взаимодействует с другими объектами.

2. Система может обладать[1] глобальными свойствами, не сводимыми к свойствам отдельных объектов.

3. Корректное описание поведения объекта, напротив, возможно лишь через систему, в которую он входит.

4. Любая система может входить в системы более высокого уровня, как в качестве подсистемы, так и в качестве элемента.

5. Видоизменение системы всегда влияет и на поведение входящих в нее объектов.

6. При изменении объекта нужно прежде всего проверять, как это изменение повлияет на содержащую его систему, и не разрушит ли оно ее глобальные свойства.

[1]И, если это — настоящая система, то обязательно обладает.

7. При изменении системы нужно приспосабливать входящие в нее объекты к новой системе.

8. Если нарушаются глобальные свойства системы, то система либо разрушается, либо в корне видоизменяется.

9. Важные для приложений свойства систем могут быть описаны на языке математики.[2]

10. Никакая система и никакой из элементов систем не функционируют безошибочно, и поэтому все описания должны рассматриваться как приближенные.

Эти положения производят впечатление столь глобальных и бесспорных, что единственной альтернативой системному подходу кажется подход бессистемный.[3] Но ведь тогда в данном месте прикладная математика находится в опасной близости от перехода из теории в учение. И это действительно так.

Рассмотрим скрытые положения системного подхода, которые дают возможность показать, в каком направлении можно искать альтернативы.

1. Все, что может быть сказано, может быть сказано точно. А о чем не следует говорить, о том нужно молчать.[4]

2. Законы классической логики и понятия математики применимы практически без ограничений для описания всего того, о чем можно говорить точно.

3. Математические структуры не навязываются человеком явлениям при их восприятии и изучении, а в некотором смысле объективно существуют в них и имеют эмпирическую основу.

4. Для каждого математического описания можно подобрать более точное, расширяющее и уточняющее его, и ни в каком случае ему не противоречащее. И так далее, пока мы не дойдем до Абсолютной Истины, хотя Абсолют и может признаваться недостижимым.

5. Даже искусственная система должна исследоваться как естественная, поскольку задача науки — поиск объективных истин и, прежде всего, анализ понятий.

[2] В изложениях теории систем это обычно еще более конкретизируется: на языке теории динамических систем либо статистическо-вероятностном языке.

[3] Единственное, о чем остается спорить — о конкретных математических средствах, применяемых для анализа систем. Но очевидно, что данный вопрос второстепенный.

[4] Л. Витгенштейн.

Первое же из сделанных предположений заставляет отказаться от понятий и заменить их терминами.

К системному подходу можно подобрать, в частности, следующую альтернативу. Ее принципы были впервые опубликованы в [25], где она была названа *логическим подходом*.[5]

Прежде всего, заметим, что объект может быть описан тремя способами: через структуру (морфологическое описание), через функции его частей (функциональное описание) и через метод построения (генетическое описание). Эти базисные описания порождают атрибутивное (через взаимосвязь структуры и функций) и конструктивное (через взаимосвязь генетического и атрибутивного).

Принципы логического подхода.

1. Понятия несводимы к их конкретным формализациям. Все, что сказано точно, имеет неточный смысл. Уловить понятия можно лишь через совокупность их различных уточнений. Привязаться к конкретному уточнению — значит потерять понятие.

2. Любое уточнение неточно, и не обязательно нужно улучшать его (если оно внутренне красиво и гармонично, то попытки улучшения лишь ухудшат, разрушив концептуальную целостность и внеся концептуальные противоречия), вместо этого на некотором этапе становится необходимым подобрать ему альтернативу.

3. Подбор формализма является критическим местом при уточнении. Нельзя пользоваться наиболее модными средствами, не обосновав их безвредности в данном конкретном случае. Классические теории почти никогда не могут предоставить альтернативы. Часто для альтернативных построений нужны не только классические теории, но и неклассические логики.

4. Мир, в котором мы живем, гораздо более искусственен, чем кажется. Поэтому нужно сосредоточиться на законах творения и созидания, а не только на изучении ‘объективных’ свойств созданной виртуальной реальности.[6]

---

[5]Редактор данного сборника заменил первоначальное название статьи: «*Логический подход как альтернатива системному*» на несколько более осторожное, поскольку считал, что альтернативы системному подходу нет.

[6]Нужно помнить, что материализм в основе своей имеет феномен *отчуждения искусственного объекта (прежде всего, денег) от людей и его объективизации*. Философия утилитаризма четко показывает скрытые бухгалтерские корни материализма, а марксизм указал их явно (как и бывает обычно с конецепциями низкого уровня, не потрудившись совершить

5. Объект является искусственным, если его атрибутивное описание логически порождается генетическим.[7] Таким образом, *искусственный объект имеет конструктивное логическое описание*.

6. В области идеальных понятий нет естественных объектов, поскольку все они созданы человеком для достижения некоей цели, и забыть их главную цель (приближение к Идее) означает забыть их реальную область применимости.[8]

7. Даже естественные объекты часто лучше изучать как искусственные, поскольку, организовав их в систему, мы тем самым приписали каждому из них цель и назначение.

8. Задача науки состоит прежде всего в нахождении новых идеальных искусственных объектов и видоизменении их реальных воплощений.

9. Мы интересуемся не истинностью, а реализуемостью. Воплощения в конце концов опираются на реальные объективные понятия, что не дает нам улететь в облака.

Таким образом, здесь мы по-прежнему подчеркиваем необходимость уточнений понятий, но переходим с одноуровневого слоя рационалистического мышления на многоуровневый.

4.2 Некоторые примеры

системная интеграция.

Игнорирование ошибок при формализации. Оптимизация — нежизнеспособность. Игнорирование неприятностей при неформальности.

акт рефлексии и применить свои достижения к себе, прежде всего, для собственной критики). В XX веке ультракоммунисты Камбоджи блестяще продемонстрировали неабсолютную природу денег, а сейчас это понятие с успехом разрушает ‘рыночное’ и ‘демократическое’ российское правительство.

[7] Согласно данному определению, камень, стоящий на вершине приметного холма, становится искусственным объектом, если мы выяснили, что он использовался, скажем, в качестве межевого знака между двумя княжествами. При этом безразлично, был ли он принесен на данную вершину либо уже находился там.

[8] Заметим, что конкретная, ‘реальная’, цель, для которой создавалось идеальное понятие, при таком подходе ничего общего не имеет с его сущностью. Нужно искать идеальную же цель и понимать новую сущность через нее.

Упражнения к §4.2

4.2.1. **Большая программная система.** Вы оказались в следующей практически безнадежной ситуации. Вас пригласили на должность руководителя проекта в связи с демонстративным уходом предыдущего руководителя, полностью рассорившегося с руководством фирмы. Он был специалистом высокого класса, подобрал сильную команду, реализовывавшую большой и сложный программный проект, но на последней стадии его показал свою полную несостоятельность как руководителя команды. Проект касается весьма ответственной системы, так что основное внимание нужно уделить *надежности*. Условия работы системы — не очень жесткое реальное время, так что на эффективность плевать тоже нельзя. Сроки поджимают, нужно за два месяца подготовить систему к строгой приемке заказчиком в опытную эксплуатацию.

Вы застали работу в следующем состоянии. Есть более 1000 модулей, написанных программистами высокой квалификации. Каждый из них имеет достаточно точные спецификации входов и менее точные спецификации выходов. По счастью, предыдущий лидер рассорился не только с руководством, но и со своей командой, так что все исполнители остались на месте. Если система работает, то она работает исключительно быстро и эффективно. Но пока что работающее состояние — скорее исключение.

Спецификация общей задачи также имеется, после трех суток напряженной работы и двух дней переваривания Вы, кажется, осознали ее настолько, что сами могли бы за неделю написать интегрирующую программу для данной тысячи компонент, но чем же она будет лучше уже имеющейся, написанной Вашим неудачливым предшественником?

Конечно, сами бы Вы перепроектировали систему с самого начала, но нет времени, да и команду это крайне обидит. Более того, люди в команде достаточно самолюбивые, и отнюдь не уверены в том, что Вы выше классом не то что их бывшего лидера, но и их самих, так что замечания от Вас будут восприняты в штыки.

Как выкрутиться из данной проблемной ситуации?

4.2.2. **Неподвижная точка.** Рассмотрим следующую задачу (частный случай теоремы Брауэра о неподвижной точке). Обязательно ли непрерывная функция $f:\,[0,1]\to[0,1]$ имеет неподвижную точку? Ответьте на этот вопрос самыми элементарными средствами. Далее, если эта точка существует, можно ли дать алгоритм ее вычисления, и как этот алгоритм будет вести себя по отношению к погрешностям исходных данных и к погрешностям вычисления функции? Какая правильная постановка задачи? Что должен вычислять этот алгоритм с заданной точностью: неподвижную точку или что-либо другое?

4.2.3. **Горы и долины.** Рассмотрим случай, когда маленький теоретический анализ задачи позволяет уменьшить труд по ее программированию раза в два.

Пусть надо из упорядоченного массива выделить гору и долину наибольшей величины. Гора — это последовательность его членов, которые сначала не убывают, а затем не возрастают, причем ровные площадки на границах горы не считаются. Долина — наоборот.

4.2.4. **Метод полей направлений.**

4.3 Позитивизм

Приближение точными. Верификация. Фальсификация.

Парадокс обобщения.

Теоретические понятия не берутся из обобщений практического опыта, опыт лишь дает возможность выбрать между их конкретными реализациями.

4.4 Незнание

4.4.1 Кант. Антиномии чистого разума.

4.4.2 Фреге. Отвлечение от смысла.

4.4.3 Брауэр. Чистое незнание в математике.

Появление системологии. Вернадский, Богданов, Тейяр де Шарден, фон Берталанффи.

Богданов — границы систем.

Вернадский и Тейяр де Шарден — ноосфера

Фон Берталанффи — математический аппарат (описание дифференциальными уравнениями).

Пример систем хищник-жертва.

Глава 5

Математические формализмы в системном подходе

5.1 Ритуальная

В данной главе мы должны будем воспользоваться многими математическими методами, да и весь курс рассчитан на тех, кто уже овладел понятиями университетского математического цикла дисциплин. Но, чтобы обеспечить единство терминологии и не ставить бесконечные ссылки на множество книг, некоторые из используемых понятий и результатов приведены здесь. Данный параграф стоит лишь просмотреть при первом чтении, отложив в памяти положение справочного материала и сделанные в нем оговорки относительно *слабостей* применяемых методов, которые обычно нигде не приводятся.

Прежде всего, напомним, что индукцию можно вести не только по натуральным числам, но и по любому вполне упорядоченному множеству.

Определение 5.1.1. *Линейно упорядоченное множество X вполне упорядочено, если для него выполнен принцип возвратной индукции (в данном случае обычно называемой трансфинитной индукцией).*

$$\forall x(\forall y(y \prec x \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \tag{5.1}$$

Здесь $A(x)$ — произвольное свойство, возможно, с параметрами.

В классической математике принцип трансфинитной индукции эквивалентен еще трем принципам.

Предложение 5.1.1. (**Принцип наименьшего числа**) *Множество вполне упорядочено тогда и только тогда, когда в каждом его непустом подмножестве существует наименьший элемент.*

Наименьший элемент, удовлетворяющий свойству $A(x)$, обозначается $\mu x\, A(x)$. μ является квантором, связывающим x. Данное обозначение используется не только для вполне упорядоченных множеств.

Предложение 5.1.2. ***(Принцип бесконечного спуска)***

$$\forall x(A(x) \Rightarrow \exists y(y \prec x \;\&\; A(y))) \Rightarrow \forall x \neg A(x).$$

Предложение 5.1.3. ***(Принцип обрыва убывающих цепей)****. Любая убывающая последовательность элементов множества X конечна.*

Если мы рассматриваем данные принципы не с точки зрения абстрактной 'истинности', а как инструменты для построения объектов, то трансфинитная индукция и принцип обрыва цепей наиболее широко применимы, принцип бесконечного спуска применим столь же широко, но не может дать построений, поскольку его результат отрицателен, а принцип наименьшего числа практически никогда не может быть реализован эффективно и часто ведет к построениям, которые нельзя выполнить даже теоретически.

Частично-упорядоченное множество, для которого выполнен принцип обрыва цепей, называется *частично вполне упорядоченным* или *фундированным*.

Вполне упорядоченные (и даже фундированные) множества могут использоваться для построения функций по трансфинитной рекурсии. В этом случае функция определяется через ее отрезок для всех меньших элементов данного множества, для минимальных (или для наименьшего) элемента базис рекурсии часто задается явно, но порой определение формулируется так, чтобы его можно было применять и к пустому отрезку функции, и тогда явное задание базиса становится излишним.

Часто трансфинитной рекурсией задают не всюду определенную функцию. Тогда в определение мы порою явно добавляем пункт, гласящий, что при невыполнении перечисленных выше условий функция считается не определенной. Но, впрочем, так считается, даже если это явно не выписано, просто мы сигнализируем, что в данном случае недоопределенность является не следствием ошибки или описки.

Поскольку в классической математике доказывается, что из любых двух неизоморфных вполне упорядоченных множеств одно и лишь одно из них изоморфно начальному отрезку другого, то для представления вполне упорядоченных множеств часто используются *ординальнае числа*, которые первоначально определялись как классы эквивалентности изоморфных вполне упорядоченных множеств.[1] Содержательно ординальные числа можно по-

[1] Такое определение формально противоречит наиболее распространенному в данный момент варианту теории множеств, но оно наиболее точно отражает суть понятия ординального числа.

нимать как некоторое стандартное вполне упорядоченное множество, достаточное, чтобы вместить тот полный порядок, который нужен нам в данном месте.

Одним из мощнейших методов доказательства теорем существования в современной математике является *аксиома выбора*. Она имеет внешне весьма привлекательную и простую формулировку, настолько естественную, что ее применение до начала XX века не осознавалось явно.

$$\begin{gathered}\forall x(x \in X \Rightarrow \exists y(y \in Y \ \& \ (x,y) \in R)) \Rightarrow \\ \exists f(f : X \to Y \ \& \ \forall x(x \in X \Rightarrow (x, f(x)) \in R)).\end{gathered} \tag{5.2}$$

Таким образом, она утверждает, что для каждого всюду определенного соответствия существует вложенное в него функциональное с той же областью определения. Как говорят, функция f *выбирает по элементу* из каждого из множеств $\{y \mid (x,y) \in R\}$. Поэтому ее часто называют *функцией выбора*.

Как и любое важное математическое утверждение, аксиома выбора имеет много эквивалентных, но внешне совершенно различных формулировок. Приведем три самые важные из них.

Первая из формулировок связана с обобщением понятия прямого произведения на бесконечные семейства сомножителей. Прежде всего определим, что такое семейство. *Семейство множеств* — просто другое название для функции, результатами которой являются множества. Часто семейство обозначается выражением типа

$$(X_i)_{i \in I}$$

вместо $\lambda i\, X(i)$. Аналогом n-ки, в которой i-тый элемент принадлежит множеству X_i, для произвольного множества индексов I служит функция с областью определения I, такая, что $f(i) \in X_i$. Таким образом, получаем еще одну формулировку аксиомы выбора, еще более естественную:

Прямое произведение семейства непустых множеств непусто.

Известны многие утверждения, эквивалентные аксиоме выбора. Перечислим часть из них.

Предложение 5.1.4. (Теорема о вполне упорядочении) *Каждое множество можно вполне упорядочить.*

Предложение 5.1.5. (Лемма Цорна) *Если в частично-упорядоченном множестве X каждое линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, то в множестве X существует максимальный элемент.*

Предложение 5.1.6. (Существование ретракций) *Для любой сюръекции $f : X \to Y$ найдется ретракция $g : Y \to X$, такая, что $g \circ f = \mathrm{id}_Y$.*

Предложение 5.1.7. (Полнота классической логики). *Каждая непротиворечивая теория имеет модель.*

Предупреждение.

Если *мы* используем аксиому выбора, значит, в общем случае данный результат невозможно обосновать никак иначе, и не требуйте явного построения объектов, существование которых утверждается!

5.2 Черные ящики и внутренние состояния

Первым математическим представлением системы, которое, несмотря на свою простоту, может перебросить мост между различными видами описаний, является ≪*черный ящик*≫.

$$\text{Вход} \xrightarrow{x} \boxed{\sum} \xrightarrow{y} \text{Выход} \tag{5.3}$$

При одном и том же входном воздействии черный ящик может выдавать разные выходы, поскольку не все мы можем контролировать явно. Эту неопределенность можно разрешить разными способами. Но практически все они сводятся (либо включают в себя) задание некоторого множества *внутренних состояний* системы, которыми определяется выход. Таким образом, представление о системе приобретает форму

$$X \xrightarrow{x} \boxed{\frac{\sum}{C}} \xrightarrow{y} Y \tag{5.4}$$

где X — множество входных воздействий, Y — множество выходных реакций системы.

Переходим к формализациям.

Определение 5.2.1. *Черный ящик (общая система) — тройка* $(X, Y, \mathbf{R})$, $\mathbf{R}$ *— отношение* $\mathbf{R} \subseteq X \times Y$. *Система называется полной, если отношение* $\mathbf{R}$ *всюду определено, т. е. все множества* $\{y \mid x\, \mathbf{R}\, y\}$ *непусты.* C *— множество состояний системы, а частичная функция* φ *— функция реакции, если*

$$x\, \mathbf{R}\, y \Leftrightarrow \exists c\, \varphi(x, c) = y.$$

Кортеж $(X, Y, \mathbf{R}, C, \varphi)$ *называется расшифрованным черным ящиком. Соответственно,* (C, φ) *— его расшифровкой.*

Теорема 5.1. *Для любого полного черного ящика существует пара (C, φ), расшифровывающая его.*

Доказательство. Вполне упорядочим множество Y. y_ε — элемент Y с номером ε. Пусть α — верхняя грань всех типов вполне упорядочений множеств $\mathbf{R}\langle x\rangle = \{y \mid x\ \mathbf{R}\ y\}$. Наименьший элемент $\mathbf{R}\langle x\rangle$ обозначим $\xi_0(x)$.

Построим семейство функций ψ_α следующим образом.

$$\psi_\beta(x) = \begin{cases} \mu\varepsilon\,(y_\varepsilon \neq \psi_\gamma(y)) & \text{при } \gamma \prec \beta, \\ \xi_0(x), & \text{если такого } y \text{ нет.} \end{cases}$$

□

Теорема 5.2. *Для всякой линейной системы существует линейное пространство скрытых состояний с, такое, что функция реакции φ представляется в форме*

$$\varphi(x, c) = \varphi_1(x) + \varphi_2(c).$$

Доказательство данной теоремы опирается еще на одну фундаментальную теорему, часто игнорируемую в курсе алгебры.

Теорема 5.3. *Во всяком линейном пространстве существует базис.*

Доказательство. Вполне упорядочим элементы пространства X. Элемент с индексом α обозначим x_α. Построим функцию χ следующим образом.

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} \mu\beta\,(x_\alpha \text{ не зависит линейно от } x_{\chi}(\gamma),\ \gamma \prec \beta) \\ \text{Не определено,} \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Область значений данной функции является базисом пространства X. Во-первых, по построению χ все элементы данной области линейно независимы. Во-вторых, если бы от них был линейно независим некоторый другой элемент, то мы получили бы противоречие со вторым пунктом определения функции, поскольку тогда был бы линейно независимый от области значений элемент с минимальным индексом. □

Доказательство теоремы 5.2. Рассмотрим множество всех линейных функционалов, являющихся детерминациями линейной системы. Это множество само является линейным пространством, и в нем существует базис. □

5.3 Тензоры

Рассмотрим некоторое конечномерное пространство X над полем K.[2] Линейный функционал — линейное отображение $f : X \to K$. Результат его применения $f(x)$ будем записывать (fx) и даже просто fx.[3]

Теорема 5.4. *Пространство линейных функционалов X^* над конечномерным пространством X имеет такую же размерность, как и X.*

Доказательство. Возьмем в пространстве X некоторый базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in[1:n]}$. Построим n функционалов f^i, таких, что $f^i\,\mathbf{e}_i = 1$, $f^i\,\mathbf{e}_j = 0$ при $i \neq j$. □

Заметим, что построенное отображение, хотя формально и является изоморфизмом, на самом деле неестественно как категорное отображение. Оно существенно зависит от выбора конкретного базиса.

Далее, элементы исходного пространства X могут в свою очередь рассматриваться как линейные функционалы над пространством $X*$, поскольку выражение $fx = a$ может рассматриваться и как применение x к f. Таким образом, пространство X^{**}, как говорят, двойное сопряженное к X, может отождествляться с самим X. Двойной изоморфизм переводит базис в тот же базис и является просто тождественным отображением. Таким образом, $X \cong X^{**}$.

Применению тензорных методов препятствуют следующие факторы. Тензорные методы основываются на предположении, что имеется объективная и удовлетворяющая строжайшим критериям шкала согласованности методов измерений.

Если линейное пространство бесконечномерно (скажем, линейное пространство непрерывных функций), то теряется базовая эквивалентность $X \cong X^{**}$.

Упражнения к §5.3

5.3.1. Рассмотрим следующее рассуждение. Запись, описывающая человека в базе данных, имеет, в частности, следующие поля.

1. Фамилия, имя, отчество;
2. Адрес;
3. Серия, номер, дата и место выдачи паспорта;
4. Идентификационный номер налогоплательщика (ИНН);

[2]То, что мы не ограничиваемся «стандартным» полем действительных чисел, не прихоть, а желание в дальнейшем немедленно применить результаты, в частности, к булевым функциям.

[3]Здесь — прямая аналогия с λ-исчислением.

5. Телефон.

Эти поля являются зависимыми, поскольку ИНН однозначно определяет личность, точно так же однозначно определяют ее серия и номер паспорта, а адрес однозначно определяется телефоном. Поэтому достаточно хранить в качестве ключа ИНН, а затем иметь совокупность функций, вычисляющих по ИНН серию и номер паспорта, по серии и номеру — дату и место выдачи, имя и телефон человека, по телефону — адрес.

Проанализируйте данное рассуждение, все ли в нем ладно?

Анализ

Глава 6

Борьба

> …Проявляется общий принцип, применимый ко всякой части партии. Он сводится к тому, что *следует сохранять свободу маневрирования и в то же время лишать этой свободы противника.*
>
> [20, стр. 77]

Ситуации борьбы — один из важнейших случаев, когда нужно применять навыки высших уровней и когда можно эффективно использовать их. Частные случаи борьбы изучались в военном искусстве и в шахматах. Книги самого высокого уровня по данным вопросам содержат ряд общих принципов, независимых от конкретного рода борьбы. Поэтому мы часто ссылаемся в данной главе на Х. Р. Капабланку и двух древних китайских стратегов: Сунь-цзы и У-цзы.

6.1 Переговорная борьба

> …У тех, кто победит пять раз, случается несчастье; кто победит четыре раза, тот ослабевает; кто победит три раза, становится первым среди князей; кто победит два раза — становится царем; кто победит один раз — становится верховным властителем.
>
> [51, стр. 319]

Здесь рассматривается частный случай процесса, промежуточного между переговорами и конфликтом: выработка решений в среде противоборствующих интересов. При этом принимаются следующие предположения:

1. Вы — самостоятельная персона, имеющая право принимать решения в ходе обсуждений без согласования с кем-либо другим. Таким образом, Вы — либо первое лицо, либо получили соответствующие полномочия и имеете волю и решимость использовать их в случае необходимости.

Вы понимаете, что наибольшая ответственность за исход лежит именно на Вас, и дело не в том, что кто-то другой с Вас “спросит”: пострадает именно Ваше положение и Ваш престиж.[1]

2. Вы достаточно (во всяком случае, не менее чем остальные участники переговоров) компетентны в рассматриваемом вопросе. Вы продумали, какие последствия будет иметь то или иное его решение.

3. Вы приняли решение вести, в основном, честную игру. Это, конечно, не исключает адекватного ответа на нечестные ходы оппонентов.

4. Все вышесказанное не исключает того, что Вы вынуждены, прекрасно это понимая, защищать решение. недостатки которого Вы слишком хорошо знаете.

Участники обсуждения называются в данной работе *коллегами*. Те из них, кто склоняются к сотрудничеству с Вами, порою называются партнерами, те, кто больше склонен к противостоянию — оппонентами.[2]

6.1.1 Морфологический ящик

Рассмотрим морфологический ящик ситуаций, которые могут возникнуть при обсуждении и принятии решений. Классифицируем их по следующим координатам.

1. Ваше собственное отношение к варианту решения, который в начале обсуждения (а скорее всего, еще до него) представлялся Вам наиболее желательным:

   1 Вы полностью уверены в своем варианте

   $\equiv$ Вы более или менее уверены в своем варианте, но знаете и его возможные слабые стороны, и сильные стороны некоторых альтернатив. Таким образом, Вы относитесь к нему несколько критически.

   0 Вы знаете, что отстаиваете отнюдь не лучший вариант.

---

[1] Эти предположения снимают ситуацию, когда Вы должны руководствоваться высказанной либо угадываемой Вами волей другого лица (или, еще хуже, коллективного органа, который обычно аккумулирует слабости всех своих членов, уничтожая их достоинства) и несете ответственность именно перед ним. Но они не исключают того, что Вы должны принимать во внимание не только свои интересы, но и интересы других, связанных с Вами, лиц.

[2] Помните, что статус партнера либо оппонента — временный! За один день один и тот же коллега может несколько раз поменять свою позицию по отношению к Вам, при этом отнюдь не являясь флюгером: он отстаивает прежде всего свои интересы.

2. Ваша относительная сила среди коллег:

   1 Вы — один из сильнейших, и не видите себе равносильных оппонентов; те, кто мог бы быть сравним с Вами по силе, скорее партнеры.

   ≡ Вы на одном уровне с остальными.

   0 Ваше влияние достаточно мало (но, конечно, ненулевое, поскольку Вы участвуете в обсуждении и принятии решения).

3. Ваши взаимоотношения в сообществе коллег:

   1 Вы в хороших отношениях с наиболее влиятельными коллегами; Вас уважают, Ваше мнение будет доброжелательно воспринято.

   ≡ Ваши отношения средние; неизвестно, как к Вам повернутся Ваши коллеги, как будет воспринято Ваше мнение, либо же оно не будет услышано вообще. Ваш авторитет сравнительно низок.[3]

   0 Ваш авторитет скорее отрицательный. Вы уверены, что самыми влиятельными коллегами все, высказанное Вами, будет воспринято в штыки. Отношения с коллегами довольно плохие.[4]

В дальнейшем рассматриваемые ситуации помечаются тройками состояний.

6.1.2 Базовые ситуации

> При этом полезно отметить еще одно важное обстоятельство: выигрывающая сторона имела общий стратегический план, выполнимый с имеющимися средствами, тогда как слабейшая сторона часто вовсе не имела плана и делала ходы просто сообразно требованиям момента.
>
> [20, стр. 77]

111 **Вы сильны, уверены, уважаемы.** Казалось бы, здесь и бороться нечего. Но на самом деле эта ситуация одна из коварнейших. Очень даже вероятно, что, полагаясь на свою силу и авторитет, Вы как следует не подготовились к обсуждению. Еще более вероятно то, что Ваша уверенность в предлагаемом решении основывается на его крайне одностороннем анализе, Вы на самом деле не знаете недостатков своего

---

[3] И поэтому скорее всего отношение к Вам будет отнюдь не худшим, если сами не нарветесь: Вы просто не рассматриваетесь как серьезный оппонент. И такое вполне может быть, даже если Вы сильны…

[4] Как ни странно, в данном случае скорее всего Ваш реальный авторитет выше, чем в случае ровных отношений: чтобы ненавидеть, нужно замечать.

решения и недооцениваете достоинства решений, предлагаемых оппонентами. Далее, одержать победу здесь обычно не составляет никакого труда, но слишком часто такая победа оказывается пирровой[5] Рассмотрим возможные повороты борьбы в данном случае.

Очень часто именно здесь Вы оказываетесь перед ситуацией “разорвавшейся бомбы”. Ваши уважаемые оппоненты потихоньку подготовили к обсуждению такие материалы и такой поворот дела, который Вы просто не прорабатывали. Тогда у Вас остается два варианта:
— Задавить обсуждение, прекрасно зная, что затем в случае малейших неприятностей все шишки будут сыпаться на Вас: ваши же партнеры заявят, что нас предупреждали, а Вы не прислушались;
— Пытаться найти решение на месте. Тут-то и может Вам пригодиться Ваш еще не подпорченный авторитет. Вы должны быстро выделить среди оппонентов наиболее безвредных для Вас и учесть их предложения максимально благожелательным образом, действуя по принципу “Разделяй и властвуй”.

Далее, отсутствие организованной оппозиции часто приводит к тому, что Вам подсовывают мелкие “улучшения”, которые, как Вы понимаете позже, портят основную идею, а в момент обсуждения общая миролюбивая и благожелательная обстановка не позволяет Вам это увидеть.

И, наконец, наличие сравнительно слабых, но упорных и неприятных, оппонентов вызывает желание, обычно подначиваемое партнерами, раздавить их лобовой атакой. Но это целесообразно лишь в том случае, если они действительно пошли на “последний и решительный” бой. Чаще же всего они, понимая раскладку сил, давно увели свои главные интересы с данного направления и провоцируют Вас на то, чтобы Вы открыли свои козыри или, еще лучше, зарвались на заведомо выигранном деле. Лучше и в данном случае сохранить видимость благородства[6], отделив часть оппонентов и учтя их интересы, поскольку это в дальнейшем принесет гораздо больше пользы, повысив Ваш авторитет.

Таким образом, здесь нужно помнить: “Прыгая от радости, смотри, как бы у тебя из-под ног не выдернули землю” и поменьше соблазняться лобовыми решениями. Если подвохов не видно, значит, они хорошо спрятаны. Если нет оппонентов, значит, некоторые партнеры лелеют за пазухой камни.

[5] Типа побед Наполеона в русской кампании, когда он выиграл *все* битвы, даже совершенно безнадежную по предпосылкам битву на Березине.

[6] Либо проявить его на самом деле, если Вы заранее хорошо проработали этот вариант; в противном случае и здесь Вы можете попасть в психологическую ловушку.

000 **Уверен в недостатках, слаб, ненавидим.** Уж здесь так и тянет сказать, что и бороться нечего. А на самом деле данная ситуация благоприятней для борьбы, чем предыдущая, если отрешиться от иллюзии, что борьбу ведут ради победы. Борьбу ведут ради достижения своих интересов, а кто по виду оказался победителем — вопрос второстепенный.[7]

Прежде всего, раз Вы прекрасно знаете недостатки решений, к которым стремитесь, то, во-первых, Вы еще лучше знаете недостатки альтернативных решений, во-вторых, Вам не жалко, если формально авторство решений будет за кем-то другим, а Вас "заставят" присоединиться к принятому варианту, и, наконец, Вы не держитесь за конкретные формулировки и готовы принять самые широкие вариации по форме, лишь бы сохранилась интересующая Вас суть.[8]

Далее, раз Вы ненавидимы, Вы вполне можете действовать "от противного": поддерживать те предложения, которые Вы больше всего хотите утопить, подбирая те аргументы, которые кажутся сильными, но могут быть с блеском опровергнуты оппонентами. Поскольку на самом деле авторитет у Вас есть, к Вашим словам прислушаются и потратят силы на опровержение того, что Вы подсунете, а не тех мест, где Вам не хотелось бы слишком подробного разбора. Естественно, это произойдет лишь в том случае, если отвлекающие предложения будут сформулированы убедительно и выглядеть так, как будто Вы относитесь к ним весьма серьезно.

И, наконец, раз Вы слабы, у главного оппонента может возникнуть желание раздавить Вас, либо же, пользуясь неблагожелательным настроением большинства, Вы можете сами спровоцировать его на лобовую атаку. Я надеюсь, что Вы заранее уберете все самое ценное с угрожаемого направления, и постараетесь завести оппонента так, чтобы он зарвался и, еще лучше, начал бы попутно давить своих союзников[9] Эта тактика особенно перспективна, если Вы уже думаете о будущем. Так что часто нужно идти на борьбу, заранее зная, что проиграешь ее. Как сказал китайский полководец У-цзы, "*Мало тех, кто овладел Поднебесной частыми победами, но много таких, кто от этих побед погибал*" ([51, стр. 319]).

---

[7] "Никогда не отказывайтесь от хода из страха проиграть. Если считаете какой-то ход хорошим, лучше всего сделать его, не думая о результате партии."

[20, стр. 132]

[8] Впрочем, отстаивать каждую букву своих предложений как пядь сталинградской земли — пожалуй, худшая тактика в любой ситуации.

[9] Для этого также нужно поддерживать, причем со всей энергией, часть Ваших оппонентов, желательно более слабых.

Итак, здесь нужно использовать максимально гибкую тактику, всячески скрывая свои подлинные цели, выставляя на первый план те, которыми можно пожертвовать, и пытаясь повести дело таким образом, чтобы нужное Вам предложение было высказано другими. Прямо возражать против нежелательного предложения нужно лишь в том случае, если это возражение удастся сформулировать в таком виде, чтобы оно выглядело предупреждением оппонента против тех опасностей, которые проглядели он и его союзники (в первую очередь союзнички) либо в таком, что у части оппонентов создастся впечатление, что партнеры хотят попутно обставить и их.[10]

Довольно часто в результате такой партизанской войны и демонстративной, благожелательно сформулированной, капитуляции перед победителем Вы оказываетесь его главным союзником, а топтавшая Вас шобла, которая под конец стала раздражать того, на кого она работала, остается сбоку.

Так что, не унывая, отлично подготовившись и отрешившись от надежд на победу — вперед!

≡≡≡ **Все в промежуточном состоянии.**

Одна из самых трудных с точки зрения тактики ведения борьбы ситуаций. Здесь проверяется Ваше мастерство и умение правильно сформулировать цель: ведь если в предыдущих ситуациях общая цель была ясна с самого начала (соответственно, победить так, чтобы победа не была обесценена и обесценить победу соперника либо сделать так, чтобы он поделился ее плодами), то здесь ее надо правильно поставить в ходе обсуждения, в зависимости от конкретной обстановки.

Итак, Вы находитесь в ситуации равновесия. Соответственно, Ваша подготовка наверняка не ниже, чем у оппонентов и партнеров, но большинство из них склонны считать, что она ниже. В этом Ваша главная слабость и главное преимущество. Слабость потому, что любая попытка решить проблему лобовым напором приведет либо к повороту всех

[10] Ситуация, когда на самом деле некоторые из союзников ведут войну не столько со своими врагами, сколько (косвенно) со своими “друзьями”, весьма распространена. Великобритания в двух мировых войнах воевала не столько против Германии, сколько против России, а во второй мировой войне сама попала под аналогичный же англосаксонско-макиавеллиевский пресс США и с блеском ее проиграла. А Россия в первой мировой проиграла, а во второй одержала пиррову победу. Но нынче уже пришел черед США одерживать пирровы победы.

Желающим посмотреть стратегию и тактику войны против союзников можно рекомендовать книги С. Переслегина [35] и В. Пикуля [36].

против Вас либо к таким поправкам, которые сделают Вашу победу заведомо горше поражения, а также потому, что в начале к Вашим словам будут прислушиваться лишь тогда, когда они льют воду на мельницу коллеги (либо же у него создается такое впечатление). Выскажете Вы в начале обсуждения самую блестящую и полезную идею — ее скорее всего просто проигнорируют.

Сила же у Вас потому, что, постепенно заставив к себе прислушиваться, Вы приобретаете больший авторитет, чем те, у кого он дан изначально. Ведь, по предыдущему, это означает, что у большинства создалось впечатление, что Вы полезны для поддержки их интересов, а у меньшинства — что Вы полезны для их оппонентов. Вы вполне можете оказаться в положении песчинки, перевешивающей чашу весов в ту либо иную сторону, и, если Вы азартны и честолюбивы, это может оказаться крайне соблазнительным, тем более, что в такой ситуации все начнут обхаживать Вас. Но эта надежда слишком часто оказывается иллюзией, разрушающейся в тот самый момент, когда Вы хотели бы на нее опереться; такая победа слишком часто оборачивается порчей отношений с половиной коллег, причем как раз с теми, кто в дальнейшем был бы полезней.

Таким образом, здесь вначале нужно держаться в тени, и даже заготовленную "бомбу" не пускать в ход до нужного момента. Далее, вначале нужно пользоваться тактикой осторожных прямых действий, и, самое главное, не опровергать, а по мере возможности поддерживать и осторожно поправлять. Поправки — самое важное здесь. Изо всех сил нужно постараться, чтобы каждая из них приходила в тот момент, когда при обсуждении уже морально готовы найти формулировку, но она еще вертится на кончике языка, общество ходит вокруг да около. Здесь важна не только квалификация, но и везение, особенно вначале: скажете чуть раньше, Вас не услышат, чуть промедлите — скажет другой.

Если Вам удалось пару раз найти точные слова для того, что всех волнует, Вас начнут слушать, к Вам начнут относиться как к субъекту, а не как к объекту. Тут и наступает момент смены тактики: сколачивание коалиции. Поскольку Вы достаточно критически относитесь к своему предложению, Вы способны уступить, по крайней мере, часть его авторства другим и искать максимально приемлемые для всех формулировки, даже частично отступая с некоторых второстепенных позиций на другие, обоснованность которых Вы уже проверили. В этом смысле Вы — ценный член любой выигрывающей коалиции, а если Ваш напор и подготовка значительно выше, чем ожидали увидеть Ваши коллеги — и ее возможный глава. Но здесь самое главное — доброжелательность.

И, когда коалиция сложилась, наступает еще одна смена позиций и тактики. Вы должны либо умиротворить оппонентов, либо выступить в качестве основной ударной силы против них. Здесь, возможно, придется идти на риск прямой фронтальной атаки, поскольку партнеры ждут от Вас подтверждения лояльности и боевитости. Но перед такой атакой нужно понять, не уйдут ли партнеры в кусты в решающий момент, поэтому лучше, чтобы застрельщиком выступили не Вы, а Вы вступались бы по принципу: “Наших бьют”.

Все вышесказанное справедливо в том случае, если Вам нужна победа. Но в такой промежуточной ситуации она часто Вам не столь уж нужна. И тогда лучше как можно дольше задерживаться на первой стадии и не идти дальше второй, работая прежде всего на будущее: завоевывая авторитет и доверие.

6.1.3 Вариации базовых случаев

Теперь рассмотрим случаи, наиболее близкие к трем базовым.

$\equiv 11$ **Полной уверенности нет, сильны, уважаемы.** Лучше, чем 111: меньше вероятности оказаться неподготовленным к неожиданностям, больше простора для маневра. Поскольку по-прежнему победа практически обеспечена, нужно уделить особое внимание улучшению своих предложений и превращению оппонентов в партнеров. Ни в коем случае не соблазняйтесь лобовой атакой, на которую Вас могут провоцировать! Поскольку Вы очень сильны, главное для Вас — не дать оппонентам отколоть от Вас партнеров, поэтому не слишком давите на них, даже если они начинают колебаться. Но лучше в данной ситуации обменять ненадежного партнера на бывшего оппонента, чем изо всех сил держаться за ускользающих бывших союзников. Так что будьте готовы к частичной смене союзов, но следите, чтобы ни в коем случае не создалось впечатление, что это происходит по Вашей вине либо инициативе.

$1 \equiv 1$ **Уверены, равноправны, уважаемы.** Опять-таки хорошо. Поскольку Вы не слишком сильны, Вас не так опасаются, и Вы вполне можете оказаться приемлемым компромиссом для остальных, тем более что Ваша уверенность в себе будет многим импонировать (если Вы не допустите ее перехода в самоуверенность и будете прислушиваться к другим). В данном случае целесообразно сформулировать свой проект таким образом, чтобы другие могли внести поправки и чувствовать себя соучастниками. Не поддавайтесь соблазну лобовой атаки, она — либо акт отчаяния, либо результат тщательной подготовки и удара абсолютно превосходящими силами, которых у Вас нет. Не переоценивайте новых партнеров, которые вполне могут появиться: чаще всего это — партнеры на день.

11 ≡ **Уверены, сильны, не слишком уважаемы.** Достаточно хорошо, но беда в том, что Вы, скорее всего, внушаете опасения не только оппонентам, но даже и партнерам. Основная Ваша задача в данном случае — повышение авторитета попутно с победой. При подготовке нужно обратить основное внимание на других участников обсуждения, постараться заранее выяснить их позиции и понять, что же Вы можете сделать для их привлечения, не поступаясь своими интересами. Беда здесь в том, что любое стремление к компромиссу может быть расценено как ослабление позиций и вызвать бешеную атаку. Если Вы готовы к обороне, лучше такую атаку спровоцировать и дать достойный отпор (вспомните Курскую дугу). А еще здесь нужно быть готовым и к тотальному и безжалостному наступлению на непримиримых оппонентов (после нескольких предложений мира и, возможно, периода намеренной обороны). Для такого наступления нужно заранее подготовить резервы и неожиданные направления ударов. Хотя, предварительно измотав противников, Вы, вероятнее всего, раздавите их и лобовой атакой, но издержки такой атаки, скорее всего, будут не окупать ее результатов.

1 ≡≡ **Уверены, равносильны, не слишком уважаемы.** Готовьтесь к удару по самолюбию. Вы уверены в Вашем решении, но если оно и пройдет, то не как Ваше. Хорошо еще, если Вас не выкинут из соавторов или соучастников.

После такого предупреждения посмотрите, как минимизировать неприятности. Оптимальная тактика больше всего похожа на применяемую в ≡≡≡. Но нужно быть готовым к переходу на активную третью стадию. Причем здесь важнее всего точно подобрать момент и направление атаки и, начав действовать, осознать, что мосты сожжены и что вот теперь нужно стремиться к победе и только к ней.

≡ 1 ≡ **Сомневаетесь, сильны, не слишком уважаемы.** Лучше в данном случае Вам уступить честь создания выигрывающей коалиции другому, самому же присоединиться к ней в решающий момент, бросив на чашу весов свой большой вес и выторговав взамен как можно больше, оставаясь в тени. Такой исход автоматически поднимет Ваш авторитет на будущее, что для вас важнее всего. А ответственность за неизбежные недостатки и издержки понесут другие. Насчет участия: Вам важнее здесь обозначить его, чем действительно участвовать. Не стоит слишком сильно вовлекаться в сомнительное чужое дело.

$\equiv\equiv 1$ **Сомневаетесь, не сильны, уважаемы.** Вас, скорее всего, будут просто приглашать в выигрывающую коалицию, а, поскольку Вы сомневаетесь, Ваше дело оценить данную коалицию: если она кажется подозрительной, то лучше занять второстепенные роли либо вообще ускользнуть из нее, использовав какой-либо благовидный предлог. Основная Ваша задача в данном случае — сохранить авторитет[11] и увеличить на будущее силу.

$0 \equiv\equiv$ **Не уверены, не сильны, не слишком уважаемы.** Работайте на будущее и не соблазняйтесь возможностью победы сейчас, если даже ее призрак проскользнет. Действуйте по принципу первой стадии $\equiv\equiv\equiv$, и переходите на вторую стадию, лишь если Вас пригласят в выигрывающую коалицию. Не принимайте на себя первых ролей (скорее всего, тот, кто Вас выдвигает, сам пришел к аналогичным предложениям, сомневается в них не меньше Вашего и ищет зицпредседателя.) Не занимайтесь сами прямой агитацией других, если пришлось переходить на вторую стадию, осторожно действуйте "от противного": скорее вскрывайте недостатки альтернативных предложений, чем рекламируйте достоинства предложений Вашей группы.

Если Вы сами хотите создать зицпредседателя, то одна из лучших тактик — временно испортить отношения после начального периода завоевания авторитета и начинать поддерживать нежелательные для Вас предложения, тем самым заваливая их и вынуждая намеченную жертву принять на себя инициативу. После этого капитулируйте, и, поскольку раскаявшийся грешник часто желаннее праведника, не исключено, что Вы выиграете на будущее дважды.

$\equiv 0 \equiv$ **Сомневаетесь, слабы, не слишком уважаемы.** Отличный вызов для Вас: здесь нужно мобилизовать все умение и все силы, чтобы с честью выйти из действительно трудной ситуации. Вначале Вам остается лишь надеяться, что устраивающее Вас предложение выдвинет кто-либо другой: даже "от противного" Вы его отстаивать не сможете. Вам предстоит потихоньку работать на авторитет, причем особенно аккуратно и активно, поскольку с точки зрения силы Вы интереса не представляете. Затем, когда Вы нашли более или менее устраивающее Вас предложение, можно временно стать "негром" у его формального автора.

[11] Не слишком старайтесь его укрепить еще сильнее: лучшее — враг, и зачастую непримиримый, хорошего.

Если же обсуждение заходит в безнадежную ситуацию, остается либо смириться с этим и работать на будущее, либо опять-таки стать временно “негром” у наименее устраивающего Вас человека, а затем начать активно поддерживать его по принципу “как веревка поддерживает повешенного”.

$\equiv\equiv 0$ **Сомневаетесь, равносильны, ненавидимы.** Здесь несколько полегче. И вес у Вас побольше, и отношения поярче. Опять-таки, как и в 000, можно действовать от противного. Но здесь это — отнюдь не единственный метод действий. Можно, наоборот, делать дельные замечания, не вылезая с собственными предложениями, и быть при этом достаточно резким. Скорее всего, самая умная из сторон захочет Вас нейтрализовать, пригласив в свою компанию. Другое дело, что их предложения Вас могут не устраивать, но тогда Вы вполне можете после такого предложения демонстративно присоединиться к другой стороне, которая, скорее всего, примет Вас с распростертыми объятьями. А если сторона всего одна, и Вы находитесь в глухой оппозиции, Вам остается лишь зафиксировать недостатки предлагаемого подавляющим большинством решения, после чего, по зрелом размышлении, оно и само может отказаться от своего варианта.

$\equiv 00$ **Сомневаетесь, слабы, ненавидимы.** Почти что 000, но Вам несколько более жаль своего решения, и, возможно, Вы несколько хуже знаете достоинства других. Даже если кто-то другой предложит Ваш вариант, Вас он, скорее всего, в свои партнеры не пригласит. Здесь есть возможность разыграть некотрый вариант гамбита, если Вы рассчитываете и на будущее: действуя “от противного”, помочь задавить желательный Вам вариант в пользу одного из самых безнадежных, после чего, когда уже решение будет фактически принято, выступить с резким заявлением, что разумный вариант высказывался и был отвергнут в пользу худшего. Это заявление в данный момент ничего не изменит, но потерпевшая поражение сторона будет Вам благодарна за бескорыстную поддержку в данную минуту, и после того, как оппоненты провалятся, к Вам вернутся сами.

$0\equiv 0$ **Не уверены, равносильны, ненавидимы.** Здесь тоже нужно действовать по принципу гамбита и не вылазить со своим предложением. Скорее всего устраивающее Вас предложение вылезет, нужно способствовать (но лишь “от противного”) тому, чтобы положение инициатора стало критическим и прийти ему на помощь в трудную минуту, перед принятием окончательного решения. Не требуйте ничего особенного за свою помощь, Вам лучше и в выигравшей коалиции быть в тени:

ведь реализуемое решение всего-навсего удовлетворительное. Зато на будущее Ваши отношения резко улучшатся, а престиж не пострадает.

00 ≡ **Не уверены, слабы, отношение ровное.** Ну что ж, Ваша задача — войти младшим партнером в выигравшую коалицию либо поддержать в трудную минуту тех, кто высказывал устраивавшее Вас предложение.

Но здесь возможен и другой вариант. Отношение к Вам ровное скорее всего потому. что Вас просто не замечают. Можно сыграть на будущее, на улучшение отношений, на завоевание авторитета. Вот здесь очень важен выбор момента. Нужно вначале вести себя весьма пассивно и позитивно, изредка делая мелкие замечания и внося предложения. Важно, чтобы эти замечания и предложения практически единогласно оценивались бы как дельные, и поэтому лучше лишний раз промолчать, чем хоть раз высказать нечто необдуманное либо некорректное в каком-то отношении. Если Вы искусны, то этим «позитивом» Вы заодно сможете незаметно подтолкнуть всех остальных в тупик. Если не очень, подождите, пока люди доспорятся до тупика сами. А поскольку Вы знаете неплохой выход, тут-то и надо предложить его. Чуть промедлите, кто-нибудь другой выскажет нечто приемлемое, и вы останетесь ни с чем. Чуть поспешите, не услышат.

6.1.4 Противоречивые случаи

> ...Если знаешь его и знаешь себя, сражайся хоть сто раз, опасности не будет; если знаешь себя, а его не знаешь, один раз победишь, другой раз потерпишь поражение; если не знаешь ни себя, ни его, каждый раз, когда будешь сражаться, будешь терпеть поражение.
>
> [46, стр. 29]

А теперь рассмотрим случаи, когда есть и явная сила, и явная слабость.

100 **Уверены, слабы, ненавидимы.** Ох, как Вам хочется пойти на крест ради своей идеи! Но помните, что даже Иисус молил Отца своего, чтобы минула его чаша сия. Крест — крайний случай, вероятнее, что Вам от противного удастся склонить кого-то к устраивающему Вас решению, но беда в том, что Вас могут при этом полностью оставить в стороне...

Еще одно решение в данном случае — подготовка нескольких “бомб” и отчаянная атака. Здесь Вам крайне нужна уверенность в себе и точный выбор момента атаки[12]. При этом необходимо ударить именно по сла-

[12] В качестве блестящего примера таких действий смотри африканскую кампанию Роммеля [14]

бым местам противников и разбить прежде всего их замыслы и их союзы. Поскольку сильные обычно ведут себя плохо, атака при хорошей подготовке может удасться. Такое проходит лишь один раз, поскольку при удаче Вы, если выживете, уже слабым не будете, да и неприязнь со стороны многих перейдет в уважение[13].

010 **Уверен в недостатках, силен, ненавидим.** И как Вас угораздило попасть в такое положение? Сколько же ошибок надо было наделать раньше, чтобы оказаться здесь? Сколько пирровых побед одержать? Ну что ж, у империи обычно нет другого выхода, как одерживать победу, придется изо всей силы давить и сейчас.[14] Но постарайтесь хоть не вести фронтальной атаки, а разбить союзы оппонентов. Скорее всего, многие переметнутся на Вашу сторону, если Вы индивидуально поработаете с ними, тем более, что Вам не жалко ни буквы, ни многих пунктов из Вашего решения, осталось бы оно Вашим.

Здесь есть и второй выход — объявить о своей незаинтересованности и сдать позиции[15]. Обычно Вам при этом удастся как следует подоить и того, в чью пользу Вы отступаете. Данный выход лучше, если подготовить его заранее либо провести совершенно неожиданно: в случае, если Вы начнете давить, а затем неуверенно отступать, на Вас накинется вся свора.

011 **Уверен в недостатках, силен, уважаем.** Второй из выходов в предыдущей ситуации является одним из лучших решений здесь, тем более, что, исходя из Вашей силы и авторитета, слишком многие будут настроены на то, чтобы заставить Вас победить и самим пойти в помощники либо получить отступное. Но здесь вполне возможно и медленное, планомерное отступление, если кто-то достаточно уверенно аргументирует устраивающий Вас вариант, не совпадающий с Вашим. Ваш престиж отнюдь не пострадает, если Вы покажете, что прислушиваетесь к аргументам, Ваше положение достаточно прочное, и ухудшать его

---

[13]Роммель после своих побед оказался именно в такой ситуации, когда его стали рассматривать весьма уважительно и крайне серьезно, и оказался не подготовлен к ней. Но зато в конце войны западные союзники и германские оппозиционеры уже мечтали о том, как бы поставить его во главе Германии либо другим способом договориться с ним.

[14]“Прямая и энергичная атака на короля успешна тогда, когда в ней участвуют все наличные силы. Сопротивление должно быть преодолено во что бы то ни стало. Атака не может быть прервана, так как отступление обычно ведет к поражению.”

[20, стр. 131]

[15]Несколько топорно такой финт проделала Россия в конце Семилетней войны, завоевав надолго в качестве преданного союзника Пруссию и не потеряв подлого и трусливого союзника Австрию.

пирровыми победами нет нужды. А часто Вам даже лучше, если Ваш оппонент предложил не намного лучшее, чем Вы, решение, и рьяно его отстоял. Он, вероятнее всего, провалится, а у Вас уже найдется к тому моменту, когда будет рассматриваться провал, гораздо лучший вариант, ведь мудрый учится на чужих ошибках.

Это — также идеальная ситуация для поиска хороших союзников: просто воспримите их советы и пожелания, все равно Вам не жалко. Ради Бога, не поддавайтесь азарту борьбы: чуть-чуть пережмете и нанесете себе громадный ущерб. Так что Ваша задача — одержать победу самыми мягкими способами либо даже демонстративно отдать ее тому, кто уж слишком лезет с негодными предложениями, если потом это поможет основательно разделаться с ним, а самому выиграть более важное сражение. Ведь, скорее всего, здесь у Вас жизненные интересы не замешаны.

Но слишком часто в такой ситуации отступление не удается из-за нежелания отступать со стороны союзников. Так что будьте готовы к тому, что Вас просто заставят взять на себя то, чего Вам не очень-то хотелось бы, либо к чему Вы в данный момент еще не подготовлены. Но, если уж так случилось, пусть ощущение неподготовлености останется лишь у Вас внутри, а нежелание взять на себя гуж — во временах, предшествующих принятому решению. Завалить такое дело — как ни странно, потерять больше, чем допустить неудачу в том, что было Вашей инициативой.

001 **Уверен в недостатках, слаб, уважаем.** Очень просто: Вы окажетесь ценным помощником практически любого выигравшего, который с удовольствием возьмет Вас младшим партнером. Есть более опасная для Вас ситуация: Вас заставят стать третейским судьей двух сил. Вот тут, чтобы не испортить отношения ни с одной стороной, нужна недюжинная мудрость. А просто умный, скорее всего, испортит с обоими.

101 **Уверены, слабы, уважаемы.** Ищите сильного партнера и заранее перетягивайте его на свою сторону. Практически невозможно, чтобы в ходе обсуждения Вы, при всей своей уверенности и авторитете, склонили других к решению, в корне отличному от предложенных.

110 **Уверены, сильны, ненавидимы.** Разбивайте союзы оппонентов и давите оставшихся. Надо побеждать.

$0 \equiv 1$ **Не уверены, равносильны, уважаемы.** Входите равноправным партнером в выигрывающую коалицию, но не проявляйте большой активности при обсуждении.

$1 \equiv 0$ **Уверены, равносильны, ненавидимы.** Все зависит от подготовки неожиданных ходов. Надо просто заставить выигрывающих взять Вас равноправным партнером во избежание худшего. Если же кто-то из сильных проводит устраивающее Вас решение, можно пойти к нему на должность Малюты Скуратова: на такую-то он Вас, скорее всего, с удовольствием возьмет.

$10 \equiv$ **Уверены, слабы, не очень уважаемы.** Вот в такой ситуации столько хороших людей пролетело! Уж лучше бы Вам быть неуверенным. И как союзник Вы ценитесь меньше, потому что заранее ясно, на чьей Вы стороне, и возможностей маневра у Вас меньше, потому что Вы слишком любите свое решение. Лучше заранее подготовить коалицию и держаться ее. По крайней мере, может быть, Вашу верность оценят. Но “шестеркой” Вы, конечно, пока что останетесь (может быть, повыситесь до семерки).

$01 \equiv$ **Не уверены, сильны, не очень уважаемы.** Здесь нужен поиск союзников, и прежде всего нужно сосредоточиться не на том, победите Вы или формально проиграете (судя по всему, здесь это Вам не столь важно), сколько на том, как повысить свой престиж. Не действуйте от противного, ведите себя прямо, Вас не смогут проигнорировать полностью из-за силы. Покажите себя ценным партнером и снимите возможные опасения по поводу излишней агрессивности.

6.1.5 Примеры

Пример 6.1.1. ***Ситуация перед Крымской войной.***

После победы над Наполеоном международный авторитет России поднялся до максимально высокой отметки. Можно считать, что некоторое время (в частности, на Венском конгрессе, посвященном устройству послевоенной Европы) она была в положении ***111****: уверена, сильна, уважаема. Но уверенность означала, что русский царь слишком был увлечен идеей, которая, конечно же, содержала немало ценного: Священный Союз. Был возобновлен принцип легитимности, делавший уже в средние века европейские войны и конфликты в среднем гораздо менее разрушительными для общества, чем азиатские. Была декларирована готовность всех европейских держав бороться за восстановление легитимного режима в любой стране, где он будет насильственно свергнут революционерами, и обязанность государей охранять права своих подданных и соблюдать законы, дабы не провоцировать революций.*

Несмотря на то, что брешь в установлениях Венского конгресса была пробита французской революцией 1830 г., Россия активно поддерживала режим Священного Союза до 1854 г. В 1849 г. лишь приглашение российских войск позволило австрийскому императору вернуть Венгрию, провозгласившую себя независимой республикой.

Но Турция оставалась вне системы Священного Союза, объединявшего христианские европейские монархии. Поэтому на повестку дня, при постоянном системном кризисе в Турции, отвратительном управлении, мятежах окраин (не только христианских) встал вопрос о ее разделе. Россия долго пыталась совершить это столь же консенсусно и мирно, как при бабке императоров Александра и Николая поделили Польшу. Но другие уже убедились, кому при разделе достается львиная доля, и не очень шли на увещевания российской дипломатии.

Правда, однажды Россия, Англия, Франция и Австрия (которой ничего другого не оставалось) выступили единым фронтом, когда восстала Греция, и добились независимости Греции, автономии Сербии и нынешней Румынии (тогда — двух дунайских княжеств Молдавии и Валахии). В истории осталось морское сражение при Наварине, когда соединенные флоты России, Англии и Франции разбили турецкий (вернее, египетский, поскольку Египет был тогда практически независим) флот. Россия продемонстрировала честность, ограничившись после подхода русской армии к Константинополю заранее согласованными территориальными уступками Турции (в Европе эта блестяще выигранная война не дала России ни пяди земли; было освобождено лишь нынешнее грузинское побережье).

Через несколько лет после этой высшей точки союза произошла революция 1830 г., а турецкий султан был так прижат к стенке своим египетским вассалом, что вынужден был «схватиться за змею», пойдя на громадные политические уступки России. Высадка российской армии в Малой Азии заставила египетского правителя быстренько убраться подальше, а Турция стала практически протекторатом России.

Но в момент истечения срока договора, который должен был продлеваться каждые 8 лет, Англия сумела создать у Николая I впечатление, что она вот-вот пойдет на раздел Турции, и Николай предпочел обменять продление договора на переговоры с Англией.

Переговоры шли-шли, но ни к чему не приводили, а тем временем была спасена Россией еще и Австрия, и, наконец, Николай решил действовать сам, а затем уже привлечь к факту раздела Англию и Австрию, в которых он был практически уверен, и считал, что им нехватает лишь смелости сделать первый шаг. Россия практически ультимативно потребовала от султана уравнения в правах христиан с мусульманами и ввела войска в Дунайские княжества, формально не объявляя войны.

Англичане при русских советовали султану уступить, чем еще подогревали воинственные настроения императора Николая, а наедине советовали султанским министрам максимально уступать, но не до конца, чтобы продемонстрировать всему миру воинственность и непримиримость России, а затем Англии выступить в роли защитника слабых и миротворца. А французы откровенно рвались в бой, чтобы взять реванш за Наполеона I и смыть позор поражения.

И таким образом крымская война была проиграна еще до ее начала. Россия выступила как агрессор и против коалиции трех мощных держав, дипломатически поддержанной еще и Австрией, которая боялась воевать, но всячески угрожала России ударом в тыл. А единственных своих союзников Грецию и Сербию Россия предала еще тогда, когда была уверена в союзничестве Австрии и благожелательности Англии.

Итак, прямые наступательные действия при неправильно поставленной цели привели к проигрышу изначально благоприятной ситуации.

Пример 6.1.2. ***Парижский мирный конгресс после Крымской Войны.*** *После конца Крымской Войны уже Англия оказалась в ситуации* **111**. *Но ослабление России сослужило ей хорошую службу, и, проиграв войну, она выиграла мир.*

Наполеон III достиг своих целей в отношении упрочения международного и внутреннего авторитета, и теперь боялся прежде всего аппетитов Англии, а сам уже точил зубы на Австрию, которая своим подлым поведением лишилась единственного верного союзника — России. Турция, которой так рьяно помогали, вообще никого не интересовала, поскольку основные экономические цели помощи были достигнуты — она еще глубже залезла в долги, а угроза со стороны России была надолго устранена.[16]

Цели российской дипломатии были гибкими, поскольку единственной задачей было минимизировать ущерб от поражения, сила России осталась нетронутой, и продолжать войну никто не хотел.

Российские дипломаты сумели договориться с Францией, нейтрализовав тем самым Англию, и предоставив Австрии выполнять роль цепного пса, пытающегося угрызть недоступного ему врага и захлебывающегося истерическим лаем. Союз с Францией многократно доказал свою жизнеспособность и естественность.

[16]Для Турции эта угроза была реальной, поскольку Турция продолжала удерживать славянские Балканы и терроризировать христианскую дружественную Армению. В этом Англия и Франция ей были не помощники, но и не мешали, дабы не получить на месте больной империи целый гадюшник (что потом все равно получилось). Так что они тогда вели себя даже чуть моральнее, чем нынешние «правители мира»: они, по крайней мере, не помогали живодерам и работорговцам.

В итоге больше всего пострадали от войны Австрия и Турция, Англия не выиграла практически ничего, кроме ослабления России, Россия, избавившись от имперских амбиций и обязательств с минимальными издержками, начала реконструкцию, а Франция получила великолепную позицию, которую удерживала около 15 лет, пока сама не увлеклась химерами и не поддалась на провокации Пруссии.

Упражнения к §6.1

6.1.1. На Россию возлагают безраздельную ответственность за все, что угодно, в том числе и за разделы Польши. Кто на самом деле был инициатором первого раздела Польши? Какую роль играла Польша в Мюнхене в 1938 г. при разделе Чехословакии?

6.1.2. Рассмотрите поведение России во время военного конфликта в Косово и в момент кризиса, связанного с провозглашением независимости Косово. В каждом из случаев ответьте на вопросы.

1. В какой ситуации Россия находилась до конфликта и после него?
2. Квалифицированно ли действовала российская дипломатия?
3. Какую линию поведения предложили бы Вы?

Глава 7

Концептуальный анализ

7.1 Неформализуемость

7.2 Противоречия и коровы

В курсе большое внимание уделяется нахождению концептуальных противоречий и «священных коров». таким образом, содержательно концептуальное противоречие — несоответствие между понятиями либо концепциями, невидимое при поверхностном анализе, но начинающее мешать при их совместном употреблении. Таково, например, взаимное отношение структурного и автоматного программирования. «Священная корова» — то, что видят, всем мешает, но никто не осмеливается взять под сомнение. Таково, например, само понятие процесса в попытках упорядочения реальной человеческой деятельности на базе теории бизнес-процессов.

Решения и подсказки

Идея решения задачи 4.2.3, стр. 99. Заметив двойственность понятий горы и долины, можно написать одну процедуру их определения, в которую в качестве параметра передается логическая процедура, задающая предикат порядка.

А можете ли Вы предложить менее «математически чистое», хотя и полностью корректное, но программистски еще лучшее использование подмеченной двойственности?

Литература

[1] В. И. Арнольд. *«Жесткие» и «мягкие» математические модели*. М.: Администрация Президента России, 1997, 23 с.

[2] Архимед. *Сочинения*. Пер. И. Н.Веселовского. М.: 1962.

[3] А. М. Белосельский-Белозерский. *Dianyologie ou tableau philosophique de l'entedment*. Dresden, 1790.

[4] Г. Биркгоф. *Теория решеток*. М.: Наука, 1984.

[5] Ф. Бэкон. *Новый органон*.

[6] А. А. Бушков. *Россия, которой не было*. М., СПб, Красноярск, 1997.

[7] С. И. Валянский, Д. В. Калюжный. *Новая хронология земных цивилизаций. Современная версия истории*. М.: АСТ Олимп, 1996.

[8] Р. Голдблатт. *Топосы. Категорный анализ логики*. М.: Мир, 1983.

[9] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, К.Ф. Самохвалов. *Введение в логику и методологию науки*. М.: Интерпракс, 1994.

[10] А. Гротендик. *Урожаи и посевы*. МК НМУ, М.: 1996.

[11] *Двадцать три Насреддина*. М. С. Харитонов (составитель), М.: Наука, 1978.

[12] Э. В. Дейкстра. *Дисциплина программирования*. М.: Мир, 1978.

[13] А. С. Дубровский, Н. Н. Непейвода, Ю. А. Чиканов. *К хронологии «Альмагеста» Птолемея*. Вторичный математический и методологический анализ. Самообразование, 1999, №1, стр. 5–30.

[14] Д. Ирвинг. *Эрвин Роммель*. М.: «Издатель Быстров», 2006, 512 с.

[15] В. В. Калашников, Г. В. Носовский, А. Т. Фоменко. *Датировка звездного каталога «Альмагеста»*. М.: Факториал, 1995.

[16] И. Кант. *Критика чистого разума*. Симферополь, Реноме, 1998.

[17] И. Кант. *Наброски письма к Белосельскому*. В кн. [19], стр. 585–588.

[18] И. Кант. *Письмо Белосельскому*. В кн. [19], стр. 632–635.

[19] И. Кант. *Трактаты и письма*. М.: Наука, 1980.

[20] Х. Р. Капабланка. *Учебник шахматной игры*. М.: ФиС, 1983.

[21] С. К. Клини.*Введение в метаматематику*. М.: ИЛ, 1957.

[22] Н. И. Конрад. *Избранные труды*. М. Наука, 1977, 625 с.

[23] Г. Крон. *Исследование сложных систем по частям — диакоптика*. Наука, М.: 1972.

[24] Ф. Кун. *Концепция научных революций*.

[25] В. А. Кутергин, Н. Н. Непейвода. *Логический подход как альтернатива системному.* В сб.: Экспертные системы. М.: Наука, 1991.

[26] В. Е. Ларичев. *Сотворение Вселенной. Солнце, Луна и небесный дракон*. Новосибирск: Наука, 1993.

[27] А. А. Любищев. *О некоторых постулатах общей систематики*. Теоретические применения методов математической логики I. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 49. Ленинград, Наука, 1975, с. 159–175.

[28] М. Месарович, Я. Такахара. *Общая теория систем. Математические основы*. М.: Мир, 1978.

[29] Н. Н. Непейвода. *Прикладная логика*. Ижевск, УдГУ, 1997.

[30] Н. Н. Непейвода. *Становление понятия конструктивности в математике*. в кн.: М. И. Панов (ред.) *Закономерности развития современной математики*. М.: Наука, 1987, с. 219-229.

[31] Ф. Ницше. По ту сторону добра и зла. Эксмо-Пресс, М.: 2001.

[32] Ф. Ницше. Человеческое, очень человеческое. В книге [**?**], стр. 11–293.

[33] Г. В. Носовский, А. Т. Фоменко. *Империя*. М.: Факториал, 1996.

[34] Р. Ньютон. *Преступление Клавдия Птолемея*.

[35] С. Переслегин

[36] В. Пикуль. Пером и шпагой.

[37] К.М. Подниекс. *Вокруг теоремы Гёделя*. Рига, 1981.

[38] И. Пригожин. *От существующего к возникающему*. М., Наука, 1985.

[39] Клавдий Птолемей. *Альмагест или математическое сочинение в тринадцати книгах*. Перевод И. Веселовского. М.: Наука, 1998.

[40] А. Пуанкаре. *Наука и гипотеза*. в кн.: А. Пуанкаре. *О науке*. М.: Наука, 1983, с. 5–152.

[41] А. Пуанкаре. *Ценность науки*. Там же, с. 153–282.

[42] А. Пуанкаре. *Наука и метод*. Там же, с. 283–404.

[43] Е. Д. Смирнова. *Логика и философия*. М.: Росспэн, 1996, 300 с.

[44] Б. Спиноза. *Этика*. Мегакон, СПб, 1993.

[45] *Справочная книга по математической логике*. т.4. М.: Наука, 1983.

[46] Сунь-цзы. *Трактат о военном искусстве*. В кн. [22], с. 26–45.

[47] Б. Такман. *Августовские пушки*. М.-СпБ.: АСТ, 1999.

[48] А. К. Толстой. *Сочинения*. т. 1., М.: Правда, 1980.

[49] А. Н. Уайтхед. *Избранные работы по философии*. М.: Прогресс, 1990.

[50] В. А. Успенский. *Лекции по теории алгоритмов*. М.: 1958.

[51] У-цзы. *Трактат о военном искусстве*. В кн. [22], с. 317–333.

[52] А. Т. Фоменко. *Глобальная хронология*. М.: МГУ, 1993.

[53] Г. Фреге. *Избранные работы*. М.: Дом интеллектуальной книги, 1997.

[54] Г. Фреге. *Смысл и значение*. В [53], стр. 25-49.

[55] Н. А. Шанин. *О конструктивном понимании математических суждений*. Тр. МИАН СССР, т. **52** (1958), стр. 226–311.

[56] А. П. Юшкевич (ред.) *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В трех томах*. М.: Наука, 1970.

[57] *Chwistek L.* Antynomie logiki formalnej. // Przegland Filozofski, v. **20** – 1921, – p. 122–151.

[58] *Chwistek L.* Neue Grundlagen der Logik und Matematik. // Mathematische Zeitschrift, v. 30 – 1929, p. 704–724, v. 34 – 1932, p. 527–534.

[59] *Chwistek L.* Granice nauki. – Lwów–Warszawa, – 1935, – 264p.

[60] H.B. Curry, R. Hindley, J. Seldin. *Combinatory Logic, v.2*, Amsterdam, North-Holland, 1972.

[61] G. Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau, 1884, 119p.

[62] G. Frege. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet*. Jena, vol. I, 1893, 254p, vol. II, 1903, 265 p.

[63] R. B. Jensen. *On the consistensy of a slight (?) modification of Quine's New Foundations*. Synthese, v. 19 (1968), p250–263.

[64] N.N. Nepejvoda. *A bridge between constructive logic and computer science*. Theoretical computer science, 90 (1991), 253–270.

[65] Leśniewski S. *Über die Grundlagen der Ontologie.* // Comptes Rendus de Varsoive, v. 23 – 1930, – p. 111–132.

[66] Quine W. v. O. *Mathematical Logic,* – Cambridge, Mass.,– 1951, – 346p.

[67] Ramsey F. P. *The foundations of mathematics and other logical essays.* – New York & London, – 1931.

[68] D.S. Scott. *Identity and existence in intuitionistic logic.* In: Applications of Sheaves, Berlin, Springer, 1979, p. 660–696.

[69] Tóth I. *Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum*. Archive for history of exact sciences. 1967, v. **3**, 249–422.

[70] *Whitehead J., Russell B.* Principia Mathematica. v1–3, – Oxford, 1912–1920.

Предметный указатель

Персоналии