ОБ АЛГЕБРЕ ИНВАРИАНТОВ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА, КУБИЧЕСКОГО ПО ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.В. Шурыгин, мл.

(Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Казань, Россия)

E-mail address: `vshjr@yandex.ru`

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$y''^n + A_1(x, y, y')y''^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x, y, y')y'' + A_n(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

которое имеет n различных решений $y'' = \lambda_i(x, y, y')$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим задачу локальной эквивалентности таких уравнений относительно действия псевдогрупп контактных и точечных преобразований. В работах [3, 4] мы показали, что задача контактной эквивалентности таких ОДУ степени n может быть сведена к задаче точечной эквивалентности ОДУ такого же вида, но степени $n - 1$. Таким образом, при $n = 2$ задача сводится к вопросу эквивалентности двух ОДУ вида $y'' = f(x, y, y')$ относительно действия псевдогруппы точечных преобразований, решенному в работах А. Трессе [2] и Б. Кругликова [1]. Аналогично, задача контактной эквивалентности ОДУ (1) при $n = 3$ равносильна задаче точечной эквивалентности при $n = 2$. Эта задача решена в работе [4].

В настоящей работе мы находим алгебру дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы точечных преобразований на множестве уравнений вида

$$y''^3 + a(x, y, y')y''^2 + b(x, y, y')y'' + c(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

имеющих три различных решения. Это действие имеет один инвариант нулевого порядка, а именно,

$$J_1 = \frac{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}{(a^2 - 3b)^3},$$

два инварианта первого порядка и девять инвариантов второго порядка (формулы для них слишком громоздкие, чтобы привести их здесь). Кроме того, имеется два независимых инвариантных дифференцирования ∇_1 и ∇_2, коэффициенты которых имеют первый порядок. Третье дифференцирование мы находим, как их коммутатор: $\nabla_3 = [\nabla_1, \nabla_2]$.

Теорема. *Алгебра дифференциальных инвариантов уравнения* (2) *порождена одним инвариантом нулевого порядка, двумя инвариантами первого порядка, пятью инвариантами второго порядка и тремя инвариантными дифференцированиями* ∇_1, ∇_2, ∇_3.

References

[1] B. Kruglikov, *Point classification of 2nd order ODEs: Tresse classification revisited and beyond.* Differential equations: Geometry, Symmetries and Integrability: The Abel Symposium 2008, Abel Symposia 5, Berlin, Springer, 2009, 199–221.

[2] A. Tresse, *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = \omega(x, y, y')$, Leipzig (1896).

[3] V.V. Shurygin, jr., *On the contact equivalence problem of second order ODEs which are quadratic with respect to the second order derivative.* `arXiv:1206.0581v1 [math.DG]`, 2012.

[4] V.V. Shurygin, jr., *The action of contact transformations pseudogroup on the second order ODEs which are cubic in second derivative.* `arXiv:1211.6339v1 [math.DG]`, 2012.