КАСАТЕЛЬНЫЕ РАССЛОЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КАТЕГОРИИ МНОГООБРАЗИЙ НАД АЛГЕБРАМИ

В.В. Шурыгин

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

E-mail: `Vadim.Shurygin@kpfu.ru`

Касательное расслоение второго порядка T^2M гладкого многообразия M образовано 2-струями $j^2_x\gamma$ ростков кривых $\gamma : (\mathbf{R}, 0) \to (M, x)$. T^2M несет на себе структуру гладкого многообразия размерности $3n$, расслоенного над M. Каноническая проекция $\pi^2_0 : T^2M \to M$ относит струе $j^2_x\gamma$ точку x. Локальная карта $h : U \ni x \mapsto \{x^i\} \in U^* \subset \mathbf{R}^n$ на M индуцирует локальную карту $((\pi^2_0)^{-1}(U), h^2)$ на T^2M, где

$$h^2 : (\pi^2_0)^{-1}(U) \ni j^2_x\gamma \mapsto \{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i\} \in U^* \times \mathbf{R}^{2n}, \quad \dot{x}^i = d(h^i \circ \gamma)/dt(0), \quad \ddot{x}^i = \tfrac{1}{2}d^2(h^i \circ \gamma)/dt^2(0).$$

Карта h^2 в свою очередь определяет на T^2M карту $((\pi^2_0)^{-1}(U), h^{\mathbf{D}^2})$ со значениями в модуле строк $(\mathbf{D}^2)^n = \mathbf{D}^2 \times \ldots \times \mathbf{D}^2$ над алгеброй $\mathbf{D}^2$ триальных чисел $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$ (срезанных многочленов одного переменного степени не выше 2), где

$$h^{\mathbf{D}^2} : (\pi^2_0)^{-1}(U) \ni j^2_x\gamma \mapsto \{X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i + \varepsilon^2\ddot{x}^i\} \in (\mathbf{D}^2)^n.$$

Преобразование $\mathbf{D}^2$-координат $(h')^{\mathbf{D}^2} \circ (h^{\mathbf{D}^2})^{-1}$ имеет вид

$$x^{i'} + \varepsilon\dot{x}^{i'} + \varepsilon\ddot{x}^{i'} = f^{i'}(x^i) + \varepsilon\dot{x}^j\partial_j f^{i'} + \varepsilon^2\left(\ddot{x}^j\partial_j f^{i'} + \tfrac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^k\partial^2_{jk}f^{i'}\right). \qquad (1)$$

Отображение (1) является $\mathbf{D}^2$-гладким в смысле Шефферса, т. е. касательное отображение к отображению (1) в каждой точке области определения является $\mathbf{D}^2$-линейным. Отсюда следует, что расслоение T^2M несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbf{D}^2$ ($\mathbf{D}^2$-гладкого многообразия) [1]. В терминах локальных $\mathbf{D}^2$-координат $\{X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i + \varepsilon^2\ddot{x}^i\}$ на $\mathbf{D}^2$-гладком многообразии $M^{\mathbf{D}^2}$ и $\{Y^\alpha = y^\alpha + \varepsilon\dot{y}^\alpha + \varepsilon\ddot{y}^\alpha\}$ на $\mathbf{D}^2$-гладком многообразии $M'^{\mathbf{D}^2}$ произвольное $\mathbf{D}^2$-гладкое отображением $F : M^{\mathbf{D}^2} \to M'^{\mathbf{D}^2}$ задается $\mathbf{D}^2$-значными функциями $Y^\alpha = F^\alpha(X^i)$, имеющими следующий вид:

$$Y^\alpha = f^\alpha(x^i) + \varepsilon\left(\dot{x}^j\partial_j f^\alpha + g^\alpha(x^i)\right) + \varepsilon^2\left(\ddot{x}^j\partial_j f^\alpha + \tfrac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^k\partial^2_{jk}f^\alpha + \dot{x}^j\partial_j g^\alpha + h^\alpha(x^i)\right). \qquad (2)$$

Касательные расслоения второго порядка образуют категорию $\mathcal{T}^2\mathcal{M}$, являющуюся подкатегорией в категории $\mathbf{D}^2$-гладких многообразий. Морфизмами в $\mathcal{T}^2\mathcal{M}$ являются произвольные $\mathbf{D}^2$-гладкие отображения $F : T^2M \to T^2M'$ между касательными расслоениями второго порядка. Рассмотрение расслоения T^2M как объекта категории $\mathcal{T}^2\mathcal{M}$ приводит к появлению расслоений $\mathbf{D}^2$-гладких реперов (произвольных порядков) над T^2M, с которыми ассоциируются поля $\mathbf{D}^2$-гладких геометрических объектов на T^2M_n. Кроме того, помимо дифференциальной группы G^2_n [2], [3], появляется расширенная структурная группа $\widehat{G}^2_n$ расслоения T^2M и соответствующее расширенное расслоение реперов второго порядка $\widehat{P}^2M$, что позволяет помимо обычных связностей второго порядка, связностей в расслоении реперов второго порядка P^2M [2], [3], рассматривать расширенные связности второго порядка, являющиеся связностями в расслоении $\widehat{P}^2M$ [4].

Из уравнений (2) следует, что $\mathbf{D}^2$-гладкое отображение F определяется однозначно гладким отображением $f : M \to T^2M'$ таким, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T^2M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi^2_0"'] & T^2M' \arrow[d, "\pi^2_0"] \\
M \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[ur, "f"] & M'
\end{tikzcd}$$

В частности, всякий $\mathbf{D}^2$-диффеоморфизм $F : T^2M \to T^2M$ определяется однозначно гладким отображением $f : M \to T^2M$ таким, что $\overline{f}$ — диффеоморфизм.

Доклад посвящен условиям, при которых 1) один $\mathbf{D}^2$-гладкий геометрический объект на T^2M может быть переведен в другой $\mathbf{D}^2$-гладкий геометрический объект $\mathbf{D}^2$-гладким диффеоморфизмом, 2) одна расширенная связность второго порядка в T^2M может быть переведена в другую расширенную связность второго порядка $\mathbf{D}^2$-гладким диффеоморфизмом. В первом случае условия можно выразить в терминах производных или джетов Ли геометрических объектов [5], [6], во втором — в терминах ковариантных производных геометрических объектов по отношению к расширенным связностям [4].

Литература.

[1] Широков А.П. *Замечание о структурах в касательных расслоениях.* Труды геометр. семин. ВИНИТИ АН СССР, т. 5, М., 1974, с. 311–318.

[2] Вагнер В.В. *Теория составного многообразия.* Труды семин. по вект. и тенз. анализу, вып. 8, МГУ, 1950, с. 11–72.

[3] Лосик М.В. *О теореме приведения для связностей высшего порядка.* В сб.: Дифференциальная геометрия. Саратовский ун-т, 1980, № 5, с. 53–64.

[4] V.V. Shurygin, L.A. Vashurina. *Connections in the second order tangent bundle with extended structure group.* Lobachevskii J. of Math., 2014, **35** (3), p. 264–280.

[5] Гайнуллин Ф.Р., Шурыгин В.В. *Голоморфные тензорные поля и линейные связности на касательном расслоении второго порядка.* Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2009, т. 151, кн. 1., с. 36–50.

[6] Шурыгин В.В. *Джеты Ли и симметрии продолжений геометрических объектов.* Фундам. и прикл. матем. 2010, т. 16, № 2, с. 163–181.