Канонический репер кривой на конформной плоскости.

А. М. Шелехов, *amshelekhov@rambler.ru*

В своей книге [Ca], с. 153, Э. Картан записывает структурные уравнения конформного пространства в полуизотропном репере и рассматривает строение группы сферических преобразований (следуя Картану, мы называем эту группу конформной). Конформная дифференциальная геометрия гиперповерхности изложена методом Картана в [AG], но в этой книге случай наименьшей размерности (кривая на плоскости) подробно не рассматривается. Мы ликвидируем этот пробел, используя общий подход и те идеи из [AG], которые сохраняют свой смысл для минимальной размерности.

Конформная дифференциальная геометрия кривой в n-мерном пространстве при $n > 3$ классическим тензорным методом детально изучалась в [Fi]. Дифференциальная геометрия кривых и семейств окружностей в двумерном и трехмерном пространствах подробно рассматривалась в [Bl], [BlT], [TT], [BN]. В [BN] кривая рассматривалась как частный случай семейства окружностей. При этом в деривационных формулах кривой авторы работы [BN] оставляют относительные инварианты (в отличие от уравнений Френе евклидовой кривой, где участвуют только абсолютные инварианты). Оба указанных обстоятельства усложняют приведение деривационных уравнений кривой к каконическому виду и делают эти уравнения бодее громоздкими и несиммметричными.

Мы доказываем, что деривационные уравнения кривой l, не являющейся окружностью, в конформном пространстве приводятся к следующему каноническом виду:

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{ds} &= A_1, \quad \frac{dA_1}{ds} = k(s)A_0 + A_3, \\ \frac{dA_2}{ds} &= A_0, \quad \frac{dA_3}{ds} = k(s)A_1 + A_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Функция $k(s)$ называется конформной кривизной кривой l. Уравнения (1) сохраняют свой вид при замене $s \to as, a = const$, то есть величина s определена с точностью до множителя. При указанной замене $k \to ka^{-2}$, то есть кривизна введет себя как инвариант веса 2.

Список литературы

[Bl] W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie. B. III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln. Berlin, 1929.

[BN] Бушманова Г.В., Норден А.П. Элементы конформной геометрии. Казанский ун-т, 1972, 178 с.

[AG] Akivis M. A., Goldberg V.V. Conformal differential geometry and its generalizations. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, Inc. New York – Chichester – Brisbane – Toronto – Singapore, 1996, pp. XIV+383.

[BlT] W. Blaschke and G. Thomsen. Vorlesungen über Differentialgeometrie, vol. 3, 1929;

[TT] T. Takasu. Differentialgeometrien in den Kugelraumen, vol. 1, 1938.

[Fi] A. Fialkow. The conformal theoty of curves. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 51, n. 3 (May, 1942), pp. 435-501.

[Ca] Э. Картан. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Изд. Казанского ун-та, Казань, 1962, 210 с.