Комбинаторные расслоения и их характеристические классы

Г.И. Шарыгин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Аннотация:

С каждым векторным (комплексным, или ориентированным вещественным) расслоением над клеточным комплексом, как известно, можно связать некоторый стандартный набор классов в когомологиях базы, называемых характеристическими классами (Чженя или Понтрягина) данного расслоения. Эти классы удовлетворяют ряду аксиом, в частности они функториально зависят от расслоения; такие классы являются важными инвариантами расслоения.

Пусть теперь задана триангуляция базы расслоения; рассмотрим сферическое расслоение, ассоциированное с данным векторным. Можно показать, что на нем существует триангуляция, согласованная с проекцией и можно задать вопрос: существует ли способ найти симплициальные коциклы, представляющие характеристические классы, основываясь лишь на информации об этих триангуляциях? Положительный (но неконструктивный) ответ на этот вопрос в общем следует из работ Рурка и Левитта начала 70-х годов. С тех пор идет процесс (более или менее успешный) поиска явных конструкций для таких выражений.

В своем рассказе я опишу основные результаты и идеи, касающиеся таких конструкций, полученные в совместной работе с Н.Е.Мнёвым (ПОМИ). Прежде всего, я опишу явные конструкции для характеристических классов в таком, казалось бы, простом случае, когда размерность сферического расслоения равна 1 (то есть слоем служит окружность). В этом случае сравнительно несложно получить явную формулу для первого (и единственного) характеристического класса Чженя этого расслоения. Достаточно неожиданно оказывается возможным дать такие же комбинаторные формулы для степеней этого класса, при этом важную роль играет специального вида комбинаторная связность на расслоениях метрических многоугольников, введенная ранее Концевичем. Отметим, что полученные таким образом формулы позволяют описать некоторые комбинаторные свойства триангуляций расслоений со слоем окружность над двумерными поверхностями (например, ответить на вопрос, каково минимальное число симплексов в триангуляциях таких расслоений).

Уже при обосновании этих формул становятся заметны общие конструкции, стоящие за поставленной задачей. В частности, становится видна роль симплициальных пучков и скручивающих коцепей, задающих расслоение. В общем случае этот подход (предположительно) приводит к дискретным обобщениям конструкций Игусы-Клейна и Бисмю-Лотта высшего кручения Рейдемейстера.