Одномерный оператор Шредингера возникает во многих областях математической физике. Следующие теоремы выражают собственные функции операторов Шредингера с полиномиальными потенциалами через собственную функцию обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов ранга два.

Напомним, что если дифференциальные операторы $L_n = \sum_{i=0}^n u_i(x)\partial_x^i$, $L_m = \sum_{j=0}^m v_j(x)\partial_x^j$ коммутируют, то по лемме Бурхнала–Чаунди существует ненулевой полином $R(z,w)$ такой, что $R(L_n,L_m)=0$. Полином $R(z,w)$ определяет *спектральную кривую* $\Gamma = \{(z,w)\in\mathbb{C} : R(z,w)=0\}$. Если ψ — совместная собственная функция $L_n\psi = z\psi$, $L_m\psi = w\psi$, то $P=(z,w)\in\Gamma$. *Рангом* пары L_n, L_m называется $l = \dim\{\psi : L_n\psi = z\psi, L_m\psi = w\psi\}$, где (z,w) — точка общего положения на Γ.

Сформулируем наши результаты.

Теорема 1. *Пусть φ — решение уравнения $(\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)\varphi=0$ и*

$$L_4 = (\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^2+\alpha_3g(g+1)x.$$

Тогда
1. Если $g=2$, z — решение уравнения

$$z^2+4\alpha_2z+12\alpha_1\alpha_3=0,$$

то $L_4\psi=z\psi$, где $\psi=p\varphi, p(x)=6\alpha_3x+z+4\alpha_2$.
2. Если $g=4$, z — решение уравнения

$$z^3+20\alpha_2z^2+16(4\alpha_2^2+13\alpha_1\alpha_3)z+320\alpha_3(7\alpha_0\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2)=0,$$

то $L_4\psi=z\psi$, где $\psi=p\varphi$, $p(x)=280\alpha_3^2x^2+20\alpha_3(z+16\alpha_2)x+z^2+20\alpha_2z+64\alpha_2^2+168\alpha_1\alpha_3$.

Теорема 2. *Пусть φ — решение уравнения $(\partial_x^2+\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)\varphi=0$ и*

$$L_4^\natural = (\partial_x^2+\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^2+2g(g+1)x(\alpha_3+2\alpha_4x).$$

Тогда
1. Если $g=1$, $z=\frac{\alpha_3^2}{\alpha_4}-4\alpha_2$, то $L_4^\natural\psi=z\psi$, где $\psi=p\varphi, p(x)=4\alpha_4x+\alpha_3$.
2. Если $g=2$, z — решение уравнения

$$z^2-\left(\frac{3\alpha_3^2}{\alpha_4}-16\alpha_2\right)z+24\alpha_1\alpha_3+192\alpha_0\alpha_4=0,$$

то $L_4^\natural\psi=z\psi$, где $\psi=p\varphi$, $p(x)=24\alpha_4^2x^2+12\alpha_3\alpha_4x-3\alpha_3^2+\alpha_4(z+16\alpha_2)$.

Теорема 3. *Пусть φ — решение уравнения $\left(\partial_x^2+\alpha_1e^x+\alpha_0+\frac14(g+\varepsilon)^2\right)\varphi=0$ и*

$$L_4^\sharp = (\partial_x^2+\alpha_1e^x+\alpha_0)^2+\alpha_1g(g+1)e^x.$$

Тогда
1. Если $\varepsilon=0$, то $L_4^\sharp\psi=-\frac14g^2(4\alpha_0+g^2)\psi$, где $\psi=p\varphi$, $p(x)=e^{gx/2}$.
2. если $\varepsilon=1$, то $L_4^\sharp\psi=-\frac14(g+1)^2(4\alpha_0+(g+1)^2)\psi$, где $\psi=p\varphi$, $p(x)=e^{-(g+1)x/2}$.