Комплексы дифференциальных форм, ассоциированные с оснащенным многообразием над алгеброй дуальных чисел

Малюгина Александра Александровна
e-mail: alexandra.malyugina@gmail.com

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет
Институт математики и механики им Н.И. Лобачевского

$\mathbb{D}$-гладким многообразием $M_n^{\mathbb{D}}$, или гладким многообразием размерности n над алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D}$ называют $2n$-мерное гладкое многообразие, наделенное атласом, функции склейки которого принимают значения в модуле $\mathbb{D}^n$, состоящем из наборов длины n элементов алгебры дуальных чисел $\mathbb{D}$, и являются дифференцируемыми над $\mathbb{D}$.

В каждой точке z многообразия $M_n^{\mathbb{D}}$ касательное пространство $T_zM^{\mathbb{D}}$ к $M^{\mathbb{D}}$ несет на себе структуру n-мерного $\mathbb{D}$-модуля. Для касательного модуля $TM_n^{\mathbb{D}}$ к многообразию $M_n^{\mathbb{D}}$ можно построить оснащение, то есть выбрать такое гладкое распределение подмодулей ${}^1T_zM_n^{\mathbb{D}}$ в каждой точке $z \in M_n^{\mathbb{D}}$, что имеет место следующее разложение тензорного произведения $T_zM_n^{\mathbb{D}} \otimes \mathbb{D}$:

$$T_zM_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D} = {}^1T_zM_n^{\mathbb{D}} \oplus_{\mathbb{D}} {}^0T_zM_n^{\mathbb{D}}. \tag{1}$$

Многообразие $M_n^{\mathbb{D}}$ с зафиксированным оснащением ${}^1T_zM_n^{\mathbb{D}}$ называется оснащенным. Разложение (1) индуцирует разложение $\mathbb{D}$-модуля $\Lambda_z^1M_n^{\mathbb{D}}$ $\mathbb{D}$-значных $\mathbb{R}$-линейных 1-форм на $T_zM_n^{\mathbb{D}}$, естественно изоморфного модулю $\mathbb{D}$-линейных 1-форм на $T_zM_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$, в прямую сумму двух подмодулей $\Lambda^1_{\mathbb{D}-\mathrm{lin},z}M_n^{\mathbb{D}}$ и $\bar{\Lambda}_z^1M_n^{\mathbb{D}}$:

$$\Lambda_z^1M_n^{\mathbb{D}} = \Lambda^1_{\mathbb{D}-\mathrm{lin},z}M_n^{\mathbb{D}} \oplus \bar{\Lambda}_z^1M_n^{\mathbb{D}}, \tag{2}$$

где $\Lambda^1_{\mathbb{D}-\mathrm{lin},z}M_n^{\mathbb{D}}$ — модуль $\mathbb{D}$-линейных 1-форм на $T_zM_n^{\mathbb{D}}$, а $\bar{\Lambda}_z^1M_n^{\mathbb{D}}$ — подмодуль в $\Lambda_z^1M_n^{\mathbb{D}}$, дополнительный к $\Lambda^1_{\mathbb{D}-\mathrm{lin},z}M_n^{\mathbb{D}}$.

Используя разложение (2), на оснащенном $\mathbb{D}$-гладком многообразии $M_n^{\mathbb{D}}$ над алгеброй дуальных чисел можно построить комплексы дифференциальных форм, которые аналогичны комплексам, построенным в [4] для случая произвольной локальной алгебры в смысле Вейля [4].

Так как гладкое многообразое $M_n^{\mathbb{D}}$ над алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D}$ несет на себе естественную структуру слоения, комплексы дифференциальных форм на $M_n^{\mathbb{D}}$ также тесно связаны с комплексами, изученными И. Вайсманом [5] и П. Молино [3].

Тензорное произведение $TM_n^{\mathbb{D}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$ изоморно обратному образу касательного расслоения второго порядка $\pi : TTM_n^{\mathbb{D}} \to TM_n^{\mathbb{D}}$ по отношению к нулевому сечению $i_0 : M_n^{\mathbb{D}} \to TM_n^{\mathbb{D}}$:

$$
\begin{array}{ccc}
i_0^{-1}(TTM_n^{\mathbb{D}}) & \longrightarrow & TTM_n^{\mathbb{D}} \\
\downarrow & & \downarrow \pi \\
M_n^{\mathbb{D}} & \xrightarrow{i_0} & TM_n^{\mathbb{D}}
\end{array}
\tag{3}
$$

Изоморфизм (3) позволяет получать дифференциальные комплексы, изучая ограничения комплексов $\mathbb{D}$-гладких форм, определенных на касательном расслоении $TM_n^{\mathbb{D}}$.

На $\mathbb{D}$-гладком локально тривиальном расслоении $E^{\mathbb{D}}$ над оснащенным $\mathbb{D}$-гладким многообразием $M_n^{\mathbb{D}}$ могут быть построены комплексы $\mathbb{D}$-линейных дифференциальных форм, $\mathbb{D}$-гладких вдоль слоев. Обозначим $\Omega^{r,s;p}E^{\mathbb{D}}$ модуль $\mathbb{D}$-значных дифференциальных форм на $E^{\mathbb{D}}$. В терминах $\mathbb{D}$-гладких координат $\{z^i = x^i + \varepsilon y^i\}$ на $M_n^{\mathbb{D}}$ и локальных $\mathbb{D}$-значных слоевых координат $\{w^u\}$ произвольная форма $\alpha_{r,s;p} \in \Omega^{r,s;p}E^{\mathbb{D}}$ представлет собой линейную комбинацию

$$\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r} \wedge dz^{j_1} \wedge \ldots \wedge dz^{j_s} \wedge dw^{u_1} \wedge \ldots \wedge dw^{u_p}$$

с коэффициэнтами $\alpha_{i_1 \ldots i_r, j_1 \ldots j_s, u_1, \ldots, u_p}(x^k, y^\ell, w^u)$, которые представляют собой $\mathbb{D}$-значные гладкие функции, $\mathbb{D}$-гладкие относительно слоевых координат w^u.

В качестве дифференциала $\hat{d}\alpha_{r,s;p}$ формы $\alpha_{r,s;p}$ можно рассмотреть компоненту внешнего дифференциала $d\alpha_{r,s;p}$ из $\Omega^{r+1,s;p}E^{\mathbb{D}}$.

Определенный таким образом оператор дифференцирования $\hat{d}$ порождает дифференциальный комплекс в расслоении $E^{\mathbb{D}}$

$$\hat{d} : \Omega^{r,1;0}E^{\mathbb{D}} \to \Omega^{r+1,1;0}E^{\mathbb{D}}. \tag{4}$$

Рассматривая комплексы типа (4), в терминах когомологических классов можно ввести понятие класса Атьи $a(P^{\mathbb{D}})$, который является препятствием к существованию $\mathbb{D}$-гладких связностей в главном расслоении $P^{\mathbb{D}}$ над $M_n^{\mathbb{D}}$.

Список литературы

[1] Atiyah M.F. Complex analytic connections in fibre bundles. Trans. AMS., vol. 85, 1957, pp. 181–207.

[2] M.A. Malakhalsev, *An analogue of the Dolbeault cohomology for manifolds over the algebra of dual numbers.* Soviet Mathematics (Izv. vuz. Mathematics), 1990, no. 11, 82–84.

[3] P. Molino, *Riemannian Foliations.* Boston-Basel. Birkhäuser, 1988.

[4] V.V. Shurygin, *Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles*, J. Math. Sci. 108:2 (2002) 249–294.

[5] Vaisman I. Variétés riemanniennes feuilletées, Czech. Math. J., Vol. 21, No. 1, 1971, pp. 46–75.