**Некоторые аспекты геометрии трансверсального расслоения второго порядка**

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского.
С. К. Кузьмина
kuzmina_s@list.ru

Пусть $M$ – многообразие размерности $m+n$ со слоением коразмерности $m$ [1]. Карта $h$ из атласа слоения на $M$ относит точке $x \in M$ координаты $\{x^i = h^i(x), y^\alpha = h^\alpha(x)\}$, где $x^i$ – трансверсальные координаты, а $y^\alpha$ – слоевые [1]. Трансверсальное расслоение второго порядка $T^2_{tr}M$ многообразия $M$ образовано классами эквивалентности кривых $\gamma : (a,b) \to M$, по следующему отношению эквивалентности:

$$\frac{d(h^i \circ \gamma_1)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(h^i \circ \gamma_2)}{dt}\Big|_{t=0}, \quad \frac{d^2(h^i \circ \gamma_1)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{d^2(h^i \circ \gamma_2)}{dt^2}\Big|_{t=0}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Координаты $(x^i, y^\alpha)$ на $M$ индуцируют координаты

$$x^i = x^i(x^j), \quad y^\alpha = y^\alpha(x^j, y^\beta), \quad \dot{x}^i = \frac{d(h^i \circ \gamma)}{dt}(0), \quad \ddot{x}^i = \frac{d^2(h^i \circ \gamma)}{dt^2}(0) \tag{2}$$

на $T^2_{tr}M$, определяющие на $T^2_{tr}M$ структуру гладкого многообразия, расслоенного над $M$, и имеет место проекция $\pi^2_0 : T^2_{tr}M \to M$. Преобразование координат на $T^2_{tr}M$ имеет вид:

$$\begin{gathered} x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad y^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^i, y^\alpha), \\ \dot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}\dot{x}^i, \quad \ddot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}\ddot{x}^i. \end{gathered} \tag{3}$$

Алгеброй триальных чисел называется трехмерная ассоциативная, коммутативная алгебра с единицей $\mathbb{D}^2$ над полем $\mathbb{R}$, операция умножения в которой в стандартном базисе $\{1 = e_1, \varepsilon = e_2, \varepsilon^2 = e_3\}$ определяется соотношением $\varepsilon^3 = 0$, а элементы имеют вид $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$. Обозначим символом $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$ $\mathbb{D}^2$-модуль, элементами которого являются строки $\{X^i, y^\alpha\}$, состоящие из $m$ элементов $X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon + \ddot{x}^i\varepsilon^2$ алгебры $\mathbb{D}^2$ и $n$ вещественных чисел $y^\alpha$. Операция умножения элемента из $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$ на элемент из $\mathbb{D}^2$ определяется следующим образом:

$$(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)\{X^i, y^\alpha\} = \{(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)X^i, ay^\alpha\}.$$

Координаты $\{X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i + \varepsilon^2\ddot{x}^i \in \mathbb{D}^2, y^\alpha \in \mathbb{R}\}$, где $x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i$ определяются уравнениями (2), задают на $T^2_{tr}M$ структуру $\mathbb{D}^2$-гладкого многообразия, моделируемого $\mathbb{D}^2$-модулем $(\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$ [2].

Всякое $\mathbb{D}^2$-гладкое отображение $F : U \to U'$ между открытыми подмножествами $U \subset (\mathbb{D}^2)^m \oplus \mathbb{R}^n$ и $U' \subset (\mathbb{D}^2)^{m'} \oplus \mathbb{R}^{n'}$ локально имеет вид:

$$x^{i'} = f^{i'}(x^j), \quad \dot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}(x^j)}{\partial x^j}\dot{x}^j + G^{i'}(x^j), \tag{4}$$

$$\ddot{x}^{i'} = \ddot{x}^i\frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}^j\frac{\partial^2 f^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} + \dot{x}^i\frac{\partial G^{i'}}{\partial x^j} + H^{i'}(x^j, y^\alpha), \quad y^{\alpha'} = g^{\alpha'}(x^j, y^\beta).$$

Если потребовать в (1) совпадения только первых производных:

$$\frac{d(h^i \circ \gamma_1)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(h^i \circ \gamma_2)}{dt}\Big|_{t=0}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

то получим трансверсальное расслоение (первого порядка) $T^1_{tr}M = T_{tr}M$ с координатами $\{x^i, y^\alpha, \dot{x}^i\}$, преобразующимися по правилу $x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad \dot{x}^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}\dot{x}^i, \quad y^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^i, y^\alpha)$, и имеют место проекции $\pi^1_0 : T_{tr}M \to M$ и $\pi^2_1 : T^2_{tr}M \to T_{tr}M$.

Введем категорию трансверсальных расслоений второго порядка $\mathcal{T}r^2{-}\mathcal{B}un$, объектами которой являются трансверсальные расслоения второго порядка слоеных многообразий $\pi^2_0 : T^2_{tr}M \to M$, где $\pi^2_0 = \pi^1_0 \circ \pi^2_1$, а морфизмами $\mathbb{D}^2$-гладкие отображения $F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M'$. Всякое $\mathbb{D}^2$-гладкое отображение $F^2$ определяет $\mathbb{D}$-гладкое отображение $F^1 : T_{tr}M \to T_{tr}M'$ и морфизм слоений $f : M \to M'$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
T^2_{tr}M & \xrightarrow{F^2} & T^2_{tr}M' \\
\pi^2_1 \downarrow & & \downarrow {'\pi^2_1} \\
T_{tr}M & \xrightarrow{F^1} & T_{tr}M' \\
\pi^1_0 \downarrow & & \downarrow {'\pi^1_0} \\
M & \xrightarrow{f} & M'
\end{array} \tag{6}$$

является коммутативной.

В категории $\mathcal{T}r^2 - \mathcal{B}un$ можно выделить автоморфизмы двух типов.

Специальные автоморфизмы первого типа $F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M$, которые характеризуются тем, что $f$ являются тождественными отображениями. В этом случае $\mathbb{D}$-диффеоморфизм $F^2$ в локальных координатах записывается следующим образом:

$$'x^i = x^i, \quad 'y^\alpha = y^\alpha, \quad '\dot{x}^i = \dot{x}^i + g^i(x^j),$$
$$'\ddot{x}^i = \ddot{x}^i + \frac{\partial g^i(x^j)}{\partial x^j}\dot{x}^j + h^i(x^j, y^\alpha). \tag{7}$$

Специальные автоморфизмы второго типа $F^2 : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M$, которые характеризуются тем, что $f$ и $F^1$ являются тождественными отображениями. Такой $\mathbb{D}^2$-диффеоморфизм $F^2$ в локальных координатах имеют вид

$$'x^i = x^i, \quad 'y^\alpha = y^\alpha, \quad '\dot{x}^i = \dot{x}^i,$$
$$'\ddot{x}^i = \ddot{x}^i + h^i(x^j, y^\alpha). \tag{8}$$

В работе изучается поведение $\mathbb{D}^2$-гладких геометрических объектов (тензорных полей и $\mathbb{D}^2$-линейных связностей) на $T^2_{tr}M$ относительно автоморфизмов второго типа. Получены условия в терминах производных Ли, при которых один объект может быть переведен в другой автоморфизмом второго типа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Molino P. *Riemannian foliations.* –Birkhäuser, 1988.

2. Шурыгин В. В. *Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля.* – Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 73. М., ВИНИТИ, 2002. – 162-236.