ПСЕВДОРИМАНОВЫ СЛОЕНИЯ И ИХ ГРАФИКИ

Долгоносова А.Ю.
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
annadolgonosova@gmail.com

Псевдоримановы слоения $(M, \mathcal{F})$ характеризуются существованием трансверсально проектируемой псевдоримановой метрики на многообразии M. Далее псевдоримановы слоения на псевдоримановых многообразиях рассматриваются с такой метрикой. Нами доказан следующий критерий псевдоримановасти слоений.

Теорема 1. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — гладкое слоение коразмерности q на псевдоримановом многообразии (M, g), причем метрика g на слоях не вырождается. Тогда для того, чтобы слоение $(M, \mathcal{F})$ было псевдоримановым, необходимо и достаточно вполне геодезичности ортогонального q-мерного распределения $\mathfrak{M}$.*

Из этой теоремы вытекает аналогичный критерий римановости слоения, принадлежащий Рейнхарту. Подробное доказательство последнего критерия для римановых многообразий дано Молино с применением свойства геодезических быть локально кратчайшими, которое не имеет аналога на псевдоримановых многообразиях.

Доказвны также следующие два утверждения о графиках псевдоримановых слоений.

Теорема 2. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — псевдориманово слоение коразмерности q на n-мерном псевдоримановом многообразии (M, g). Тогда:*

(1) *График $G(\mathcal{F})$ слоения $(M, \mathcal{F})$ является хаусдорфовым $(2n - q)$-мерным многообразием с индуцированным слоением $\mathbb{F} = \left\{p_i^{-1}(L_\alpha) \,|\, L_\alpha \in \mathcal{F}\right\}, i = 1, 2,$ где $p_i : G(\mathcal{F}) \to M$ — канонические проекции на многообразие M.*

(2) *На графике $G(\mathcal{F})$ существует единственная псевдориманова метрика h, относительно которой $(G(\mathcal{F}), \mathbb{F})$ — псевдориманово слоение, а $p_i : G(\mathcal{F}) \to M,\ i = 1, 2,$ — псевдоримановы субмерсии.*

Теорема 3. *Если $(M, \mathcal{F})$ — трансверсально полное псевдориманово слоение на псевдоримановом многообразии (M, g) и h — указанная выше индуцированная псевдориманова метрика на его графике $G(\mathcal{F})$, то:*

(1) *Индуцированное слоение $(G(\mathcal{F}, \mathbb{F}))$ на $(G(\mathcal{F}), h)$ является трансверсально полным.*

(2) *Канонические проекции $p_i : G(\mathcal{F}) \to M,\ i = 1, 2,$ образуют локально тривиальные расслоения.*

(3) *Каждый слой $\mathcal{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha)$, $L_\alpha \in \mathcal{F}$, слоения $(G(\mathcal{F}), \mathbb{F})$— невырожденно приводимое псевдориманово многообразие, изометричное фактор-многообразию $(L_\alpha \times L_\alpha)/\Psi$ псевдориманова произведения $L_\alpha \times L_\alpha$ по группе изометрий Ψ, изоморфной ростковой группе голономии $\Gamma(L_\alpha)$ слоя L_α.*

Работа выполнена совместно с Н.И. Жуковой.