Вычисление индекса псевдодифференциальных операторов над некомпактными многообразиями

Арутюнов Андроник Арамович

3 января 2015 г.

Задача вычисления индекса эллиптических псевдодифференциальных операторов была впервые поставлена И.М. Гельфандом в 1960 году. В 1962 году была опубликована формула Атьи-Зингера, позволяющая вычислять индекс эллиптического псевдодифференциального оператора на компактном многообразии через гомотопические инварианты.

Бесконечно-дифференцируемая функция $h(t,v) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ лежит в пространстве $M(\mathbf{R}^{2n})$ если для нее выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} &h(t+e,v) = h(t,v), \\ &h(t,v+e) = e^{-2\pi i t e} h(t,v), \end{aligned} \tag{1}$$

для всякого целочисленного вектора $e \in \mathbf{Z}^n$. Здесь и далее запись te обозначает скалярное произведение векторов t и e.

Преобразование Λ определим следующим образом

$$\Lambda : f(x) \to \sum_{u \in \mathbf{Z}^n} e^{2\pi i u t} f(u+v). \tag{2}$$

Преобразование Λ устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ и $M(\mathbf{R}^{2n})$.

Определим класс символов псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве Шварца. $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Определение 1. *Будем говорить, что бесконечно-дифференцируемая функция $\hat{\sigma}(a,b,c,d) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{4n})$ лежит в классе функций $\mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$, если она периодична по первым двум переменным*

$$\hat{\sigma}(a+e_1, b+e_2, c, d) = \hat{\sigma}(a,b,c,d), \quad \forall e_{1,2} \in \mathbf{Z}^n, \tag{3}$$

и кроме того для всяких n-мерных мультииндексов α, β существует такая неотрицательная константа $C_{\alpha,\beta}$, что выполняется неравенство

$$\left| \partial_c^\alpha \partial_d^\beta \hat{\sigma}(a,b,c,d) \right| \le C_{\alpha,\beta} \left(1+|c|\right)^{m_1-|\alpha|} \left(1+|d|\right)^{m_2-|\beta|}. \tag{4}$$

Пару (m_1,m_2) мы будем называть обобщенным порядком роста символам $\hat{\sigma}$.

Если функция $\hat{\sigma}$ не зависит от переменных a и b то мы получим определение биградуированного псевдодифференциального оператора, близкое к стандартному классу символов.

Редукция, определенная формулой (2), порождает редукцию пространства псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ к псевдодифференциальынм операторам, действующим в пространстве $M(\mathbf{R}^{2n})$, но не исчерпывает всех действующих в пространстве $M(\mathbf{R}^{2n})$ псевдодифференциальных операторов. Это позволяет расширить класс изученных в работах [1] и [2] псевдодифференциальных операторов, дополнив их нелокальными псевдодифференциальными операторами (псевдодифференциальными операторами со сдвигами).

Пусть функция $\hat{\sigma}$ обладает обобщенным порядком (m_1,m_2), $\hat{\sigma} \in \mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$. Тогда в силу периодичности по первым двум группам переменных она разложима в ряд Фурье

$$\hat{\sigma}(t,v,c,d) = \sum_{l,k \in \mathbf{Z}^n} e^{2\pi i l t} e^{2\pi i k v} \hat{\sigma}_{l,k}(c,d), \tag{5}$$

где функции $\hat{\sigma}_{l,k}(c,d)$ определяются по формуле

$$\hat{\sigma}_{l,k}(c,d) = \iint\limits_{\mathbf{I}^{2n}} \hat{\sigma}(a,b,c,d) e^{2\pi i l a} e^{2\pi i k b} da\, db. \tag{6}$$

Формально определим оператор $\tilde{A}$, действующий, вообще говоря, в пространстве обобщенных функций, по символу $\hat{\sigma} \in \mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$ следующим образом

$$\tilde{A}h(t,v) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to v}\mathcal{F}^{-1}_{\xi_1\to t}\hat{\sigma}\left(t, v, \frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right)\mathcal{F}_{v_y\to\xi_2}\mathcal{F}_{t_y\to\xi_1}h(t_y,v_y). \tag{7}$$

Будем говорить, что $\tilde{A}$ обладает обобщенным порядком (m_1,m_2).

Теорема 1. *Оператор $\tilde{A}$, определенный фомулой (7) действует в пространстве $M(\mathbf{R}^{2n})$*

$$\tilde{A} : M(\mathbf{R}^{2n}) \to M(\mathbf{R}^{2n})$$

и является псевдодифференциальным.

Определим теперь класс нелокальных псевдодифференциальных операторов (ПДО со сдвигом), действующих над пространством Шварца $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Обозначим через T_g паралельный перенос на вектор $g \in \mathbf{Z}^n$. То есть

$$\begin{aligned} &T_g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \\ &T_g : x \mapsto x - g. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть A_{lk} - псевдодифференциальные операторы обобщенного порядка (m_1,m_2), для всех $l,k \in \mathbf{Z}^n$. Рассмотрим линейный непрерывный оператор A, действующий в пространстве Шварца $A : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Определение 2. *Если оператор A представим в виде*

$$A = \sum_{l,k\in\mathbf{Z}^n} T_l e^{2\pi i k x} A_{l,k}, \tag{9}$$

то будем называть такой оператор нелокальными псевдодифференциальным операторам обобщенного порядка (m_1,m_2).

Пусть оператор $\tilde{A}$ псевдодифференциальный оператор обобщенного порядка (m_1,m_2), действующий в пространстве $M(\mathbf{R}^{2n})$. Рассмотрим оператор $A = \Lambda^{-1}\tilde{A}\Lambda$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow[\Lambda]{} & M(\mathbf{R}^{2n}) \\ {\scriptstyle A}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \tilde{A}} \\ \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) & \xrightarrow[\Lambda]{} & M(\mathbf{R}^{2n}). \end{array} \tag{10}$$

Теорема 2. *Оператор A является нелокальным ПДО обобщенного порядка (m_1,m_2) и является нелокальным псевдодифференциальным оператором*

$$A = \sum_{l,k} T_l e^{2\pi i k x} A_{\hat{\sigma}_{l,k}}, \tag{11}$$

где операторы $A_{\hat{\sigma}_{l,k}}$ это псевдодифференциальные операторы с символами $\hat{\sigma}_{l,k}(x,\xi)$.

Теорема 2 позволяет дать определение символа нелокальных ПДО. А именно, зафиксируем функцию $\hat{\sigma}(a,b,c,d) \in \mathcal{S}_M^{m_1,m_2}$. Определим нелокальный псевдодифференциальный оператор A

$$A = \hat{\sigma}(\overset{4}{T_l}, \overset{3}{e^{2\pi i k x}}, \overset{2}{x}, \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}). \tag{12}$$

Теорема 2 дает возможность выяснить при каких условия на операторы A_g формальная запись нелокального ПДО из определения 2 корректно определяет нелокальный псевдодифференциальный оператор, то есть при каких условиях оператор A действует в пространстве Шварца $A : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 3. *Оператор A из определения 2 корректно определен тогда и только тогда, когда абсолютно и равномерно сходится ряд*

$$\hat{\sigma}(t, v, \xi_1, \xi_2) := \sum_{l,k \in \mathbf{Z}^n} e^{2\pi i l t} e^{2\pi i k x} \sigma_{l,k}\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right), \tag{13}$$

где $\sigma_{l,k}$ - символ оператора $A_{l,k}$.

Следующее предложение, позволяет вычислить индекс нелокального ПДО.

Теорема 4. *Пусть операторы A и $\tilde{A}$ - операторы из теоремы 2. Тогда, если символ оператора $\tilde{A}$ эллиптический, то операторы A и $\tilde{A}$ фредгольмовы в соответствующих нормах, то есть для любых вещественных параметров $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$ фредгольмовы операторы*

$$A : H^{s_1,s_2} \to H^{s_1-m_1,s_2-m_2}, \tag{14}$$

$$\tilde{A} : H_M^{s_1,s_2} \to H_M^{s_1-m_1,s_2-m_2}. \tag{15}$$

Имеет место формула для индекса

$$index\, A = index\, \tilde{A} = \left(ch\left[\sigma\left(\frac{\xi_1}{2\pi} + v, \xi_2\right)\right], [\mathbf{T}^{2n}]\right), \tag{16}$$

где через $ch[\sigma]$ обозначен характер Черна расслоения, задаваемого символом $[\sigma]$, приведенным к базе $\mathbf{T}^{2n}$ при помощи изоморфизма Тома.

Формула (16) для индекса эллиптического нелокального оператора, действующего в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ранее в литературе повидимому не встречалась.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А.С. Мищенко за научное руководство и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] *Арутюнов А.А., Мищенко А.С.* Редукция ПДО исчисления на некомпактном многообразии к компактному многообразию удвоенной размерности. Доклады РАН. 2013. Т.451, N4. С. 369-373.

[2] *Арутюнов А.А., Мищенко А.С.* Редукция исчисления псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к псевдодифференциальным операторам на компактном многообразии удвоенной размерности. Математические заметки. 2013. Том 94, выпуск 4. С. 488-505.