О субримановом геодезическом потоке для распределения Гурса

С.В. Агапов[1]

В этой работе мы изучаем субриманову задачу на группе Гурса. Отвечающая этой задаче гамильтонова система вполне интегрируема. Мы находим поверхности уровней первых интегралов, находящихся в инволюции. Кроме того, мы показываем, что существуют экстремальные траектории, чьи проекции на горизонтальную плоскость являются замкнутыми кривыми. Такие траектории интересны тем, что они отвечают движению вдоль "запрещенных"направлений.

Распределение Гурса двумерных плоскостей $\triangle$ в $\mathbb{R}^n$ задается векторными полями $f_1(q) = (1, 0, -x_2, \ldots, -x_{n-1})$ и $f_2(q) = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $q = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Определим скалярное произведение в $\triangle$ таким образом, чтобы векторы $f_1(q),\ f_2(q)$ образовывали ортонормированный базис. Так как векторные поля $f_1(q), ..., f_n(q)$, где $f_k = [f_1, f_{k-1}] = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 на k-ом месте), $3 \leq k \leq n$, линейно независимы и порождают все $\mathbb{R}^n$, то по теореме Рашевского — Чоу (см. [1]) любые две точки $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить кусочно-гладкой траекторией системы

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), u \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

при этом $|\dot{q}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Векторные поля $f_1(q), ..., f_n(q)$ порождают n-мерную нильпотентную алгебру Ли со следующими коммутационными соотношениями:

$$[f_1, f_{k-1}] = f_k, \qquad 3 \leq k \leq n, \qquad [f_1, f_n] = [f_i, f_j] = 0, \qquad 2 \leq i, j \leq n.$$

Эта алгебра Ли называется алгеброй Гурса, а отвечающая ей группа Ли на $\mathbb{R}^n$ называется группой Гурса. При этом $f_1(q), ..., f_n(q)$ являются левоинвариантными векторными полями.

По теореме Филиппова (см. [1]) любые две точки $q_0,\ q_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить траекторией системы (1) минимальной длины, то есть такой траекторией, на которой достигается минимум следующего функционала

$$l = \int_0^T |\dot{q}|\ dt, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029) и РФФИ (грант 12-01-00124-а).

где $q(0)=q_0,\ q(T)=q_1$. Такие траектории называются *оптимальными.*

Рассматриваемая задача оптимального управления (1), (2) играет важную роль в робототехнике — в частности, она описывает движение машины с прицепами на плоскости (см. [2]).

Из принципа максимума Понтрягина (см. [3]) получаем следующую гамильтонову систему

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

где

$$H(p,q,u) = \langle p, u_1 f_1 + u_2 f_2 \rangle - \frac{u_1^2 + u_2^2}{2},$$
$$H(p,q,u) = \max_{\widetilde{u}\in\mathbb{R}^2} H(p,q,\widetilde{u}).$$

Гамильтоновы системы такого вида, отвечающие субримановой задаче на других группах Ли, изучались, например, в [4] — [8]. Гамильтонова система (3) вполне интегрируема (см., например, [8]).

Теорема 1. *Гамильтонова система (3), отвечающая задаче (1), (2), обладает следующими первыми интегралами:*

$$F_1 = H = \frac{1}{2}((p_1 - x_2 p_3 - \ldots - x_{n-1} p_n)^2 + p_2^2),$$

$$F_2 = p_2 - F_3 x_1 - F_4 \frac{x_1^2}{2!} - \ldots - F_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$\ldots$$

$$F_{n-2} = p_{n-2} - F_{n-1} x_1 - F_n \frac{x_1^2}{2!}, \qquad F_{n-1} = p_{n-1} - F_n x_1, \qquad F_n = p_n.$$

Интегралы $F_i,\ i = 1,...,n$, почти всюду функционально независимы и находятся в инволюции.

Объясним, как устроены поверхности уровней интегралов F_i. Введем отображение $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x,p) = (F_1(x,p), ..., F_n(x,p))$.

Теорема 2. *Если $C \in \mathbb{R}^n$ — регулярное значение отображения φ, то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо двум экземплярам $\mathbb{R}^n$, либо s_1 непересекающимся цилиндрам $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, где $0 \le s_1 \le n-2$.*

Если C — критическое значение φ, то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо $\mathbb{R}^n$, либо объединению $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_k,\ k \le n-2$. Здесь Γ_j гомеоморфны либо $\mathbb{R}^{n-1}$, либо $\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma$, где γ — окружность или замкнутая кривая с s самопересечениями.

Система (3) допускает траектории, для которых $x_1(t)$, $x_2(t)$ — периодические функции, а их проекции на плоскость Ox_1x_2 — замкнутые кривые.

Теорема 3. *Среди решений системы (3) найдутся такие, что их проекции на плоскость Ox_1x_2 образуют замкнутые кривые, симметричные относительно оси Ox_1.*

Поиск траекторий такого вида мотивирован тем, что они отвечают движению вдоль запрещенных направлений, эта проблема естественным образом возникает в различных прикладных задачах, о которых уже было сказано выше.

Список литературы

[1] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, "Геометрическая теория управления", Физматлит 2005.

[2] "Robot Motion Planning and Control", ed. J.P. Laumond, Springer, Berlin, Heidelberg, 1998.

[3] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, "Математическая теория оптимальных процессов". — М.: Физматгиз, 1961.

[4] I. A. Taimanov, "Integrable geodesic flows of nonholonomic metrics", Journal of Dynamical and Control Sistems, V. 3, № 1, 2003, 129 – 147.

[5] А.Д. Мажитова, "Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли", Матем. труды, 2012, т. 15, № 1, 120 – 128.

[6] Ю.Л. Сачков, "Теория управления на группах Ли". — Совр. математика. Фунд. направления. Т. 26 (2007), 5 – 59.

[7] А.А. Ардентов, Ю.Л. Сачков, "Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля", Матем. сборник, 2011, т. 202, номер 11, 31 – 54.

[8] A. Anzaldo-Meneses, F. Monroy-Perez, "Goursat distribution and sub-Riemannian structures", Journal of Math. Physics, V. 44, № 12, 2003.